

Tentamen TI2310 Automaten en Talen

15 april 2013, 14.00–17.00 uur

- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 3.
- Dit tentamen bestaat uit 4 open vragen.
- De open vragen tellen ieder even zwaar mee.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van elektronische apparatuur zoals rekenmachines, mobiele telefoons en dergelijke, niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoorden in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier). Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- Controleer voordat u uw antwoorden inlevert, of op ieder blad uw naam en studienummer staan vermeld en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. Beschouw de volgende uitspraken over talen. Ga na of deze geldig dan wel niet geldig zijn voor willekeurige talen L_0 , L_1 en L_2 over een alfabet Σ . Geef in het geval dat een uitspraak geldig is een bewijs daarvan, en geef in het geval dat dit niet zo is een onderbouwing van de ongeldigheid door middel van een tegenvoorbeeld inclusief uitleg hiervan.

- (a) (5 punten) Als $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, dan $L_1^* \cap L_2^* = \emptyset$.

Antwoord: De uitspraak is ongeldig. **Tegenvoorbeeld:** Neem bijv. $L_1 = \{a\}$ en $L_2 = \{aa\}$. Nu geldt $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, maar $\varepsilon \in L_1^*$ en $\varepsilon \in L_2^*$, zodat $\varepsilon \in L_1^* \cap L_2^* \neq \emptyset$.

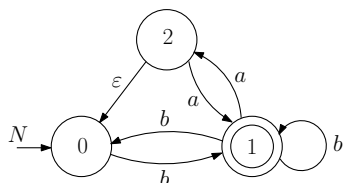
- (b) (5 punten) $L_0(L_1 \cup L_2) = L_0L_1 \cup L_0L_2$.

Antwoord: De uitspraak is geldig. **Bewijs:** We bewijzen $L_0(L_1 \cup L_2) \subseteq L_0L_1 \cup L_0L_2$ en $L_0L_1 \cup L_0L_2 \subseteq L_0(L_1 \cup L_2)$.

- Stel $w \in L_0(L_1 \cup L_2)$. Dan is w te schrijven als $w = uv$ met $u \in L_0$ en $v \in (L_1 \cup L_2)$. Als $v \in L_1$, dan geldt $w \in L_0L_1$, en als $v \in L_2$, dan geldt $w \in L_0L_2$. Hieruit volgt dat $w \in L_0L_1 \cup L_0L_2$. Derhalve $L_0(L_1 \cup L_2) \subseteq L_0L_1 \cup L_0L_2$.
- Stel $w \in L_0L_1 \cup L_0L_2$. Als $w \in L_0L_1$, dan is w te schrijven als $w = uv$ met $u \in L_0$ en $v \in L_1$. Dan geldt echter ook dat $v \in L_1 \cup L_2$, zodat $w \in L_0(L_1 \cup L_2)$. Idem als $w \in L_0L_2$. Derhalve $L_0L_1 \cup L_0L_2 \subseteq L_0(L_1 \cup L_2)$.

Hiermee is aangetoond dat $L_0(L_1 \cup L_2) = L_0L_1 \cup L_0L_2$.

2. Beschouw de NFA N in onderstaande figuur:



- (a) (4 punten) Construeer op basis van N een Reguliere Grammatica G zodanig dat $L(G) = L(N)$. Hierbij dient de constructiewijze die tijdens het college is behandeld voor DFA's, te worden gebruikt.

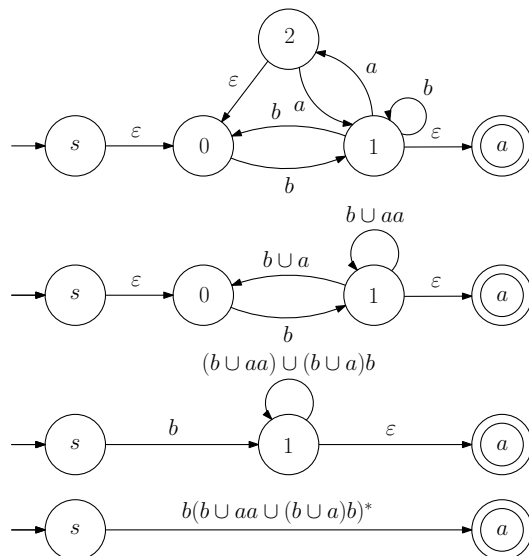
Antwoord: De gezochte grammatica G wordt gedefinieerd als $G = (\{S_0, S_1, S_2\}, \{a, b\}, P, S_0)$ waarbij P gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow bS_1, \\ S_1 &\rightarrow bS_0 \mid bS_1 \mid aS_2 \mid \varepsilon, \\ S_2 &\rightarrow S_0 \mid aS_1. \end{aligned}$$

De variabelen S_0 , S_1 en S_2 corresponderen hierbij resp. met de toestanden 0, 1 en 2. De regels in P corresponderen met de transities in N .

- (b) (6 punten) Construeer volgens de in Sipser behandelde methode die gebruik maakt van Gegeneraliseerde Niet-deterministische Eindige Automaten (GNFA's) een Reguliere Expressie R zodanig dat $L(R) = L(N)$. Hierbij dient u **alle tussenstappen** bij de afleiding van de gevraagde Reguliere Expressie in de vorm van een transitiegraaf (toestandsdiagram) te tekenen!

Antwoord: Eerst worden een nieuwe starttoestand s en eindtoestand a toegevoegd. Vervolgens worden de knopen 2, 0 en 1 verwijderd.



De gezochte Reguliere Expressie is $b(b \cup aa \cup (b \cup a)b)^*$.

3. Gegeven is de volgende taal L over alfabet $\Sigma = \{a, b\}$:

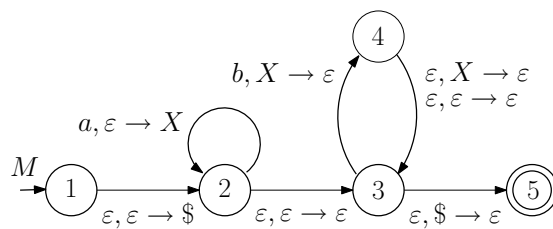
$$L = \{a^n b^m \mid m, n \geq 0 \text{ en } m \leq n \leq 2m\}.$$

(a) (7 punten) Construeer een stapelautomaat (PDA) M zodanig dat $L(M) = L$.

Let op: Uw antwoord dient aan de volgende eisen te voldoen:

- De gevraagde PDA M wordt beschreven in de vorm van een transitiegraaf (toestandsdiagram).
- M bezit **maximaal 5 toestanden** waaronder precies één eindtoestand.
- Indien M accepteert, dan is de stapel leeg.
- Per transitie mag slechts één stapelsymbool tegelijk op de stapel worden geplaatst.

Antwoord:



(b) (3 punten) Geef een beknopte, intuïtieve motivatie dat de geconstrueerde PDA correct is.

Antwoord: Voor de woorden in taal L geldt dus dat het aantal b 's kleiner of gelijk is aan het aantal a 's, maar groter dan of gelijk aan de helft van het aantal a 's. De PDA M is zo geconstrueerd dat eerst in de transitie van 1 naar 2 het stapelbodemsymbool $\$$ wordt gepusht. Vervolgens wordt in de lus bij 2 voor iedere gelezen a een X op de stapel geplaatst. Daarna wordt een lege transitie naar toestand 3 uitgevoerd. In de lus 3–4–3 wordt eerst voor iedere gelezen b één X van de stapel gepopt en vervolgens wordt er niet-deterministisch 0 of 1 X gepopt gaande van toestand 4 naar 3. Dit zorgt ervoor dat de verhouding tussen het aantal gelezen a 's en b 's voldoet aan de gestelde eisen voor L . Tenslotte wordt $\$$ gepopt en komt M in de accepterende toestand 5 met lege stapel indien het hele invoerwoord is verwerkt.

4. Beschouw nogmaals de taal L uit de vorige opgave.

- (a) (3 punten) Geef een precieze formulering van de Pompstelling voor Reguliere Talen (*Eng: Pumping Lemma for Regular Languages*).

Nota bene: Hiermee wordt bedoeld de tekst van de betreffende stelling zoals in Sipser of in de collegeslides beschreven: “Zij L een oneindige, reguliere taal, dan bestaat er...”, of een tekst gelijkwaardig hieraan.

Antwoord: Zie Sipser, Theorem 1.70 of slide 9 bij college/studieopdracht 5:
Zij L een oneindige, reguliere taal.

- Dan bestaat er een $p > 0$, de *pomplengte van L* , en
- voor ieder woord $w \in L$ met $|w| \geq p$
- bestaat er een opsplitsing $w = xyz$ met $|xy| \leq p$ en $|y| > 0$, zodat
- voor alle $i \geq 0$ geldt $xy^iz \in L$.

- (b) (7 punten) Bewijs met deze Pompstelling dat L **niet** regulier is.

Antwoord: Bewijs: Stel dat L regulier is. Volgens de Pompstelling bestaat er dan een natuurlijk getal $p > 0$, de pomplengte van L . Neem het woord $w = a^{2p}b^p$. Evident geldt dat $|w| = 3p \geq p$ en $w \in L$. Voor dit woord w zou een opsplitsing $w = xyz$ moeten bestaan met $|xy| \leq p$ en $|y| > 0$ zodanig dat $xy^iz \in L$ voor alle $i \geq 0$. Uit deze voorwaarden volgt dat $y = a^n$ voor een $0 < n \leq p$. Voor $i = 3$ geldt nu dat $xy^iz = xy^3z = a^{2p+2n}b^p \notin L$, want $(2p+2n)/2 = p+n > p$ omdat $n > 0$. Tegenspraak, want volgens de Pompstelling zou moeten gelden dat $xy^3z \in L$, maar dat is niet het geval.