

Tentamen TI2320 / IN2505-B Berekenbaarheidstheorie

31 augustus 2012, 14.00–17.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 open vragen.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 1.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 40.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 10 punten op.
- Het eindcijfer wordt bepaald door afronding van $\frac{9}{40} \cdot (\text{aantal punten}) + 1$ op een geheel of half cijfer.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaf trek.
- Voordat u uw antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje uw naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. Gegeven is een alfabet Σ en een *beslisbare* (Eng.: decidable) taal $D \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$. Verder is gegeven dat de taal E gedefinieerd is door:

$$E = \{x \in \Sigma^* \mid \text{er is een } y \in \Sigma^* \text{ zodanig dat } \langle x, y \rangle \in D\}.$$

- (a) (2 punten) Geef een definitie van het begrip *beslisbare taal*.
 (b) (8 punten) Bewijs dat E *Turing-herkenbaar* (Eng.: Turing-recognizable) is.
2. Beschouw de verzameling van Nietdeterministische Eindige Automaten (Eng.: Nondeterministic Finite Automata), kortweg NFA's, over het alfabet $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$. Gegeven is de taal:

$$TEST_{NFA} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een NFA die het woord } test \text{ accepteert}\}.$$

- (a) (4 punten) Beargumenteer dat $TEST_{NFA}$ *afelbaar* (Eng.: countable) is.
 (b) (6 punten) Ga na of $TEST_{NFA}$ *beslisbaar* (Eng.: decidable) is of niet, en bewijs uw opvatting.
3. Gegeven is een alfabet Σ . Beschouw het volgende probleem¹:

$$D = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ is een TM, } w \in \Sigma^* \text{ en } L(M) = \Sigma^* - \{w\}\}.$$

Met andere woorden, D bestaat uit die (coderingen van) paren bestaande uit een Turing-machine M en een woord w zodanig dat M alle woorden in Σ^* accepteert met uitzondering van het woord w .

Bewijs met behulp van *mapping reduction* dat D *niet beslisbaar* (Eng.: undecidable) is. Uw bewijs dient daarbij uit 2 delen te bestaan:

- (a) (5 punten) Een beschrijving van de *reductie(functie)* f .
 (b) (5 punten) Het bewijs dat deze f inderdaad aan de eisen van een mapping reduction voldoet.
4. Gegeven is de verzameling $COMP_{TM}$ van alle coderingen van Turing-machines over een gegeven invoeralfabet Σ die een *berekenbare functie* (Eng. computable function) $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ berekenen. Met andere woorden:

$$COMP_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een TM die een berekenbare functie } f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \text{ berekent}\}.$$

- (a) (3 punten) Gegeven is dat $M_\emptyset$ een Turing-machine met invoeralfabet Σ is die op geen enkele invoer termineert en waarvoor derhalve geldt $L(M_\emptyset) = \emptyset$. Ga na of $\langle M_\emptyset \rangle \in COMP_{TM}$ of niet, en beargumenteer uw antwoord.
 (b) (7 punten) Bewijs met behulp van de *recursiestelling* dat $COMP_{TM}$ *niet beslisbaar* (Eng.: undecidable) is.

¹Hier wordt de *verschiloperatie* op verzamelingen gebruikt: Als A en B verzamelingen zijn, dan duidt $A - B$ de verzameling $\{x \in A \mid x \notin B\}$ aan, ofwel de verzameling van alle elementen die in A maar niet in B zitten.