TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TU Delft

Tentamen IN1305-I
Fundamentele Informatica 1, deel I: Logica

14 januari 2009, 9.00–12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- **LET OP:**
  Iedereen moet opgaven 1 t/m 4 maken. Je mag daarnaast kiezen of je opgave 5 of 6 maakt. (Opgave 5 gaat over de boommethode, die in 2008-2009 voor het eerst is behandeld.)
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 2.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 100.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 20 punten op.
- Het eindcijfer c wordt bepaald volgens de formule $c = \frac{9}{100} \cdot (\text{aantal punten}) + 1$.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (**gebruik eerst kladpapier**).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan interpretatie over, maar wees duidelijk in wat je bedoelt.
- Voordat je je antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- **Vanmiddag zullen de uitwerkingen van dit tentamen op Blackboard worden gepubliceerd.**

1. (a) Beschouw de waarheidstafel van een propositielogische redenering, bestaande uit premissen en een conclusie.
   i. (4 punten) Hoe kun je aan de waarheidstafel zien of de redenering logisch geldig is?
   ii. (4 punten) Hoe kenmerkt zich in een waarheidstafel een tegenvoorbeeld voor de geldigheid van een redenering?

   (b) Beschouw het 2-plaatsige connectief $\odot$, dat gedefinieerd wordt door (de derde kolom van links in) de waarheidstafel hieronder.

p	q	$p \odot q$	$p \downarrow q$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0

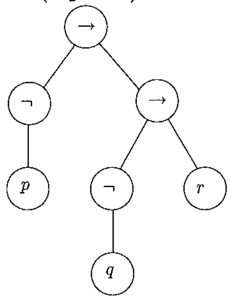
   i. (6 punten) Geef een formule in de propositielogica met beide propositieletters p en q, die de gebruikelijke connectieven $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ mag bevatten, en die equivalent is met de formule $p \odot (p \odot q)$. Toon deze equivalentie aan met een waarheidstafel waarin je tenminste de kolommen onder p en q (helemaal links) en onder alle gebruikte connectieven invult.
   ii. (6 punten) De *Quine dagger* $\downarrow$ (ook wel NOR, dus $\neg(p \vee q)$, zie de meest rechtse kolom in de tabel bij 1.b.) is een 'sole sufficient' connectief, dus alle andere connectieven kunnen in termen van dit connectief worden uitgedrukt.
   Druk de formule $p \odot q$ uit in termen van de Quine Dagger, dus als een equivalente formule die alleen het connectief $\downarrow$ gebruikt (dat overigens meerdere keren mag en zal moeten voorkomen). (Hint: probeer eerst $p \odot q$ te herschrijven naar een formule met (een deel van) de 5 gebruikelijke connectieven (als bij 1.b.i.), die lijkt op de equivalente formule van de Quine dagger, $\neg(q \vee p)$.)

2. Zij $A, B \in PROP$. Bewijs in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie volgens Fitch de volgende metabeweringen. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.
   (a) (10 punten) $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$.
   (b) (10 punten) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$.

3. (a) (4 punten) Geef de definitie van het Cartesisch product $A \times B$ van twee verzamelingen A en B.
   (b) Zij A en B verzamelingen. Ga na of de volgende stellingen juist of onjuist zijn. Geef een bewijs, respectievelijk een tegenvoorbeeld in de vorm van specifieke verzamelingen A en B.
   i. (8 punten) $A \cup B = (A^c \cup B^c)^c$.
   ii. (8 punten) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$, waar $\mathscr{P}(A)$ de machtsverzameling van verzameling A is, dat wil zeggen, de verzameling van alle deelverzamelingen van A.

4. (a) Geef recursieve definities van de volgende functies. (Tip: Ga altijd aan de hand van een aantal formules na of je recursief gedefinieerde functies berekenen wat ze moeten berekenen.)

   i. (6 punten) de functie $d(F) : PROP \mapsto \mathbb{N}$ die aan een formule $F \in PROP$ de *diepte* van de ontledingsboom van de formule toekent. Zie de figuur hieronder voor een voorbeeld van een ontledingsboom, voor de formule $\neg p \to (\neg q \to r)$.



   De diepte is gedefinieerd als *de lengte van het langste pad* van de wortel van de boom (het hoofdconnectief, $\to$ in de figuur), naar een blad (een propositieletter). De diepte van de ontledingsboom in de figuur is dus $d(\neg p \to (\neg q \to r)) = 3$, de lengte van het pad van de wortel (helemaal bovenaan), naar q. De diepte van een formule die enkel uit een propositieletter bestaat is dus 0, niet 1!

   ii. (4 punten) de functie $c(F) : PROP \mapsto \mathbb{N}$ die aan een formule $F \in PROP$ de *complexiteit* van F toekent, dat wil zeggen het aantal connectieven in F.

   (b) (10 punten) Bewijs met structurele inductie over $PROP$ dat voor alle formules $F \in PROP$ geldt dat $d(F) \leq c(F)$.

5. (a) Definieer de volgende begrippen:

   i. (3 punten) een 'model' van een formule $A \in PROP$,

   ii. (3 punten) $\Gamma \models A$ (met $\Gamma \subseteq PROP$ en $A \in PROP$).

   (b) (7 punten) Zij $A, B \in PROP$. Ga m.b.v. de boommethode na of de volgende meta-bewering juist of onjuist is, en beargumenteer je antwoord. Als de bewering onjuist is, construeer dan een tegenvoorbeeld. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.
   $((A \to B) \to B) \to B \models (A \to B) \to B.$

   (c) (7 punten) Zij P en Q 1-plaatsige predicaatsymbolen. Ga m.b.v. de boommethode na of de volgende metabewering juist of onjuist is, en beargumenteer je antwoord. Als de bewering onjuist is, construeer dan een tegenvoorbeeld. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.
   $\forall x(Px \to Qx), \exists x \neg Qx \models \exists x \neg Px.$

6. (a) (10 punten) Zij $A, B \in PROP$. Ga voor de volgende metabewering na of deze juist danwel onjuist is. Geef een bewijs als de bewering juist is, respectievelijk een tegenvoorbeeld in de vorm van proposities A en B waarvoor de bewering onjuist is.
   als $\models A \to B$ dan $\models \neg A$ of $\models B$.

   (b) (10 punten) Bewijs in het systeem voor natuurlijke deductie volgens Fitch de metabewering van vraag 5.c. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.

Einde tentamenopgaven