TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

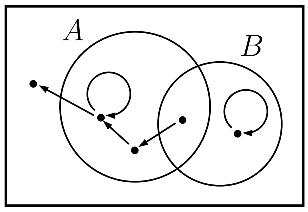
Tentamen IN1305-I
Fundamentele Informatica 1, deel I: Logica

27 oktober 2008, 9.00–12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- **LET OP:**
  - Maak opgaven 1 t/m 5 als je dit jaar het vak hebt gevolgd.
  - Maak opgaven 2 t/m 6 als je eerder dit vak hebt gevolgd.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 1.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 50.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 10 punten op.
- Het eindcijfer c wordt bepaald volgens de formule $c = \frac{9}{50} \cdot (\text{aantal punten}) + 1$.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (**gebruik eerst kladpapier**).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- Voordat u uw antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje uw naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- **Vanmiddag zullen de uitwerkingen van dit tentamen op Blackboard worden gepubliceerd.**

1. **Deze opgave is voor studenten die in 2008 Logica hebben gevolgd.**
   (a) Kies uit de schuingedrukte zinsdelen zodat ware zinnen ontstaan, en beargumenteer je keuze:
      i. (1 punt) Als (*één tak/alle takken*) van een boom sluit(en), is de redenering (*geldig/ongeldig*).
      ii. (1 punt) Als (*één tak/alle takken*) van een boom niet sluit(en), is de redenering (*geldig/ongeldig*).
   (b) (4 punten) Zij $A, B, D \in PROP$. Ga m.b.v. de boommethode na of de volgende meta-bewering juist of onjuist is, en beargumenteer je antwoord. Als de bewering onjuist is, construeer dan een tegenvoorbeeld. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.
   $(A \to B) \to A, B \to \neg D \models (A \vee B) \to \neg D$.
   (c) (4 punten) Zij A en B 1-plaatsige predicaatsymbolen. Ga m.b.v. de boommethode na of de volgende metabewering juist of onjuist is, en beargumenteer je antwoord. Als de bewering onjuist is, construeer dan een tegenvoorbeeld. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.
   $\forall x(Ax \to Bx) \models \forall x(\neg Bx \to \neg Ax)$.

2. Zij A en B 1-plaatsige predicaatsymbolen en R een 2-plaatsig predicaatsymbool.
   (a) (4 punten) Bepaal van elk van de volgende uitspraken of ze waar of onwaar zijn in nevenstaand model (de pijlen geven de relatie R weer), en beargumenteer je antwoord.
   1. $\forall x[(Ax \wedge \neg Bx) \to \exists y(Rxy \wedge Ryy)]$
   2. $\exists x[(Ax \wedge Bx) \wedge \exists y(Rxy \wedge By)]$
   3. $\neg\forall x[Ax \vee \neg\exists y(Ay \wedge Ryx)]$



   (b) (6 punten) Maak een model met **precies 4 elementen** waarin de volgende uitspraken allemaal tegelijkertijd waar zijn, en leg uit waarom elk van de uitspraken geldt.
   1. $\forall x[(Ax \wedge \neg Bx) \to \exists y(Ryx \wedge \neg By)]$
   2. $\exists x[(\neg Ax \wedge \neg Bx) \wedge \exists y(Rxy \wedge Ay)]$
   3. $\exists z[(\neg Az \wedge \neg Bz) \wedge \neg\exists y(Ay \wedge Rzy)]$
   4. $\neg\forall x[Ax \vee (Bx \vee \neg Rxx)]$

3. Zij $A, B, C \in PROP$. Bewijs in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie volgens Fitch de volgende metabeweringen. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.
   (a) (5 punten) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.
   (b) (5 punten) $A \to B, \neg C \to \neg B \vdash A \to C$.

4. (a) Geef recursieve definities van de volgende functies.
      i. (2 punten) $\#_p : PROP \to \mathbb{N}$, waar $\#_p(F)$ het aantal propositiesymbolen in $F \in PROP$ is.
      ii. (3 punten) $\#_2 : PROP \to \mathbb{N}$, waar $\#_2(F)$ het aantal 2-plaatsige connectieven in $F \in PROP$ is.
   (b) (5 punten) Bewijs met structurele inductie over $PROP$ dat voor alle formules $F \in PROP$ geldt dat $\#_p(F) = \#_2(F) + 1$.

5. (a) (2 punten) Geef de definitie van $\mathscr{P}(A)$, de machtsverzameling van een verzameling A.
   (b) Zij A en B verzamelingen. Ga na of de volgende stellingen juist of onjuist zijn. Geef een bewijs, respectievelijk een tegenvoorbeeld in de vorm van specifieke verzamelingen A en B (en C).
      i. (4 punten) Als $A \subseteq B$ en $A \subseteq C$, dan $A \subseteq B \cap C$.
      ii. (4 punten) $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

6. **Deze opgave is voor studenten die vóór 2008 Logica hebben gevolgd.**
   Zij $A, B \in PROP$. Ga voor elk van de volgende metabeweringen na of deze juist danwel onjuist is. Geef voor elke metabewering een bewijs, respectievelijk een tegenvoorbeeld in de vorm van proposities A en B waarvoor de bewering onjuist is.
   (a) (5 punten) Als $A \models B$ en $\models \neg A$, dan $\models \neg B$.
   (b) (5 punten) Als $\neg A \models A$, dan $\models A$.

Einde tentamenopgaven