TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen IN1305-I
Fundamentele Informatica 1, deel I: Logica

27 oktober 2008, 9.00–12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- **LET OP:**
  - Maak opgaven 1 t/m 5 als je dit jaar het vak hebt gevolgd.
  - Maak opgaven 2 t/m 6 als je eerder dit vak hebt gevolgd.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 9.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 50.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 10 punten op.
- Het eindcijfer c wordt bepaald volgens de formule $c = \frac{9}{50} \cdot \text{(aantal punten)} + 1$.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (**gebruik eerst kladpapier**).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- Voordat u uw antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje uw naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- **Vanmiddag zullen de uitwerkingen van dit tentamen op Blackboard worden gepubliceerd.**

1. **Deze opgave is voor studenten die in 2008 Logica hebben gevolgd.**
   (a) Kies uit de schuingedrukte zinsdelen zodat ware zinnen ontstaan, en beargumenteer je keuze:
      i. (1 punt) Als (*één tak*/*alle takken*) van een boom sluit(en), is de redenering (*geldig*/*ongeldig*).

Antwoord: Als *alle takken* van een boom sluiten, is de redenering *geldig*. Als alle takken sluiten is de verzameling $\{\Gamma, \neg C\}$ behorende bij de bewering $\Gamma \models C$ niet vervulbaar, en is er dus geen model voor Γ dat ook een model voor $\neg C$ is. Dan zijn dus alle valuaties die model zijn voor Γ ook model voor C, en is de bewering geldig, en volgt C logisch uit Γ (en is dus de redenering $\Gamma \mathrel{.\because.} C$ logisch geldig).
Commentaar: zie onder 1.a.ii.

      ii. (1 punt) Als (*één tak*/*alle takken*) van een boom niet sluit(en), is de redenering (*geldig*/*ongeldig*).

Antwoord: Als *één tak* van een boom niet sluit, dus open blijft, is de bewering *ongeldig*. (In feite geldt natuurlijk *minimaal* één tak.) In die tak is namelijk de verzameling $\{\Gamma, \neg C\}$ vervulbaar, en bestaat er dus een model voor de verzameling premissen Γ, dat ook model voor de negatie van de conclusie C is. Er is dus een valuatie die alle premissen waarmaakt, en tegelijkertijd de conclusie onwaar. Dan is dus de redenering niet logisch geldig, want de conclusie is dan geen logisch gevolg van de premissen.
Commentaar: Vaak waren bij i. en ii. weliswaar de gekozen opties correct, maar voldeed de uitleg niet. Met name kwamen daarin heel vaak de premissen niet voor. Ik heb veel argumentaties gezien die gingen over het vervulbaar zijn van "de negatie van de conclusie" maar zonder dat de premissen daarbij werden betrokken: cruciaal bij de boommethode is juist dat je de *verzameling* beschouwt waarin de premissen zitten *samen met* de negatie van de conclusie. Als die verzameling vervulbaar is—wanneer tenminste één van de takken van de boom niet sluit—is dus er een model voor die verzameling, wat wil zeggen dat er een valuatie bestaat die tegelijkertijd zowel alle premissen, als de negatie van de conclusie waar maakt, en dus de conclusie zelf onwaar maakt.

   (b) (4 punten) Zij $A, B, D \in PROP$. Ga m.b.v. de boommethode na of de volgende meta-bewering juist of onjuist is, en beargumenteer je antwoord. Als de bewering onjuist is, construeer dan een tegenvoorbeeld. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.
   $(A \to B) \to A, B \to \neg D \models (A \vee B) \to \neg D.$

Antwoord: Het antwoord moet gegeven worden in de vorm van een boom, die ik hieronder in woorden beschrijf.

Wanneer beide premissen, $((A \to B) \to A)$ en $B \to \neg D$, en de negatie van de conclusie, $\neg((A \vee B) \to \neg D)$, herschreven zijn, resteren 3 disjuncties, $\neg B \vee \neg D$, $A \vee B$, en $\neg(A \to B) \vee A$, en de formule D. Wanneer de boom wordt gesplitst in deze volgorde van disjuncties, heeft de boom uiteindelijk 4 takken, waarvan er 2 niet sluiten, die van de laatste disjunctie, $\neg(A \to B) \vee A$. Beide niet-sluitende takken leveren hetzelfde tegenvoorbeeld op: een valuatie v met $v(A) = v(D) = 1$ en $v(B) = 0$.

Conclusie: er blijft tenminste 1 tak open. Dit betekent dat de verzameling van de premissen plus de negatie van de conclusie vervulbaar is. Er bestaat dus een valuatie die tegelijkertijd alle premissen waar maakt en de conclusie onwaar. De redenering is dus niet logisch geldig: de conclusie volgt niet logisch uit de premissen.

Commentaar: zie onder 1.c.

   (c) (4 punten) Zij A en B 1-plaatsige predicaatsymbolen. Ga m.b.v. de boommethode na of de volgende metabewering juist of onjuist is, en beargumenteer je antwoord. Als de bewering onjuist is, construeer dan een tegenvoorbeeld. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.
   $\forall x(Ax \to Bx) \models \forall x(\neg Bx \to \neg Ax).$

Antwoord: Ook hier moet het antwoord in de vorm van een boom worden gegeven, die ik hieronder in woorden beschrijf.

De negatie van de conclusie, $\neg\forall x(\neg Bx \rightarrow \neg Ax)$, zegt dat niet voor alle x de implicatie geldt. Dit betekent dat er een x moet zijn waarvoor de ontkenning van deze implicatie geldt: $\exists x\neg(\neg Bx \rightarrow \neg Ax)$. Wanneer we die x de naam a geven krijgen we: $\neg(\neg Ba \rightarrow \neg Aa)$, hetgeen in twee stappen $\neg Ba$ en $\neg\neg Aa$ geeft. De premisse zegt dat voor alle x geldt $Ax \rightarrow Bx$. Hiervoor mogen we dus a invullen en krijgen we $Aa \rightarrow Ba$. Dat wordt $\neg Aa \vee Ba$, en dit geeft een splitsing in $\neg Aa$ en Ba. Beide takken sluiten, want we hadden al $\neg\neg Aa$ en $\neg Ba$, respectievelijk.

De argumentatie is dat aangezien alle takken van de boom sluiten, de verzameling van alle premissen plus de negatie van de conclusie niet vervulbaar is. Er is dus geen enkele valuatie die tegelijkertijd alle premissen waar, en de conclusie onwaar kan maken. Dus maken alle valuaties die de premissen waar maken, ook de conclusie waar, en is de bewering dus waar: de conclusie volgt logisch uit de premisse, en de redenering is logisch geldig.

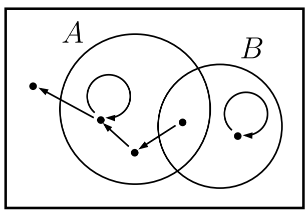
Commentaar: De manier waarop bij beide vragen over de boommethode veel punten verloren zijn gegaan, is dat regels van de boommethode op subformules zijn toegepast, wat niet is toegestaan. Je mag bijvoorbeeld niet $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ vervangen door $(\neg A \vee B) \rightarrow A$, want $A \rightarrow B$ is een subformule. In dit geval mag je wel $\neg(A \rightarrow B) \vee A$ opschrijven, in verband met welke formule je vervolgens eerst de boom moet splitsen voordat je verder iets met $\neg(A \rightarrow B)$ mag doen.

Bij onderdeel b. werd het tegenmodel vaak vergeten, of was het niet correct. Je vindt het tegenmodel door in een tak die niet sluit omhoog te gaan tot de wortel van de boom, en voor alle meta-variabelen (A, B, etc.) die je tegenkomt de corresponderende valuatie in het model op te nemen. Als je bijvoorbeeld A tegenkomt, moet in het tegenmodel $v(A) = 1$ gelden, en als je $\neg A$ tegenkomt, moet in het tegenmodel $v(A) = 0$ gelden. Als je een metavariabele niet tegenkomt, maakt het niet uit welke waarheidswaarde het tegenmodel eraan toekent, dat mag zowel 0 als 1 zijn.

Bij onderdeel c. werden veel fouten gemaakt, ook weer veel subformules waarop regels werden toegepast. Maar vooral ging het met het substitueren vaak mis. Velen hebben de kwantoren niet meteen weggewerkt, door voor de x een specifiek object in te vullen, of dit werd in de verkeerde volgorde gedaan voor $\exists$ en $\forall$. Wanneer je tot de conclusie bent gekomen dat er een x moet bestaan ($\exists$) waarvoor een uitspraak geldt (hier $\neg(\neg Bx \rightarrow \neg Ax)$), kun je die x een naam geven, en het bijvoorbeeld object a noemen (zie hierboven bij het antwoord). Dan krijg je de vrij simpele formule $\neg(\neg Ba \rightarrow \neg Aa)$ die je met de reguliere regels kunt aanpakken. De premisse zegt daarnaast dat voor alle x een zekere expressie geldt, en dat is dan natuurlijk ook zo voor object a, die je dus mag invullen: $Aa \rightarrow Ba$. Als je eerst de $\forall$ kwantor 'aanpakt' door a te substitueren (de $\forall$ blijft natuurlijk staan, zet er daarom een sterretje bij), mag je niet daarna a invullen voor de $\exists$ kwantor, dat moet een andere letter zijn, bijvoorbeeld b. Daarna mag je weer wel b voor de $\forall$ invullen, en verdergaan met herschrijven.

2. Zij A en B 1-plaatsige predicaatsymbolen en R een 2-plaatsig predicaatsymbool.

   (a) (4 punten) Bepaal van elk van de volgende uitspraken of ze waar of onwaar zijn in nevenstaand model (de pijlen geven de relatie R weer), en beargumenteer je antwoord.

   1. $\forall x[(Ax \wedge \neg Bx) \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Ryy)]$
   2. $\exists x[(Ax \wedge Bx) \wedge \exists y(Rxy \wedge By)]$
   3. $\neg\forall x[Ax \vee \neg\exists y(Ay \wedge Ryx)]$

Antwoord: Uitspraken 1 en 3 zijn waar, 2 is onwaar.

1. Deze uitspraak is waar. Voor alle elementen x in de verzameling $A - B$ (dus waarvoor geldt $Ax \wedge \neg Bx$, dit zijn 2 elementen) geldt dat er een element y bestaat waarmee x een relatie heeft (een pijl van x naar y) en dat een relatie met zichzelf heeft. Voor beide elementen in $A - B$ is dit overigens hetzelfde element.

2. Deze uitspraak is niet waar. Er bestaat geen x die in de doorsnede van A en B zit en waarvoor een element y bestaat waarmee x een relatie heeft, en dat in B zit. Er *is* wel een element in $A \cap B$ dat een relatie met een ander element heeft, maar dat andere element zit niet in B.

3. Deze uitspraak is waar. Het is het beste om deze uitspraak te herschrijven om hem goed te kunnen interpreteren. Hiervoor kun je één van de equivalenties gebruiken die op het college besproken is, en die in het dictaat staat, te weten $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$ (samen met regels voor equivalenties van propositielogische formules):

$$\begin{aligned} \neg\forall x[Ax \vee \neg\exists y(Ay \wedge Ryx)] &\equiv \exists x\neg[Ax \vee \neg\exists y(Ay \wedge Ryx)] \\ &\equiv \exists x[\neg Ax \wedge \neg\neg\exists y(Ay \wedge Ryx)] \\ &\equiv \exists x[\neg Ax \wedge \exists y(Ay \wedge Ryx)] \end{aligned}$$

   Nu is duidelijk wat hier beweerd wordt: er bestaat een element x dat niet in A zit en waarvoor een element y bestaat dat wel in A zit en dat een relatie met x heeft. Dit zijn de elementen die betrokken zijn bij de meest linkse pijl, dus deze uitspraak is waar in dit model.

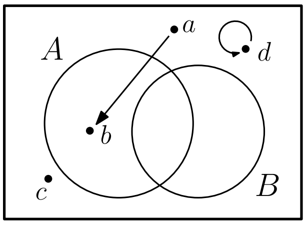
Commentaar: Hier zijn veel punten verloren gegaan doordat de uitleg slechts bestond uit een herformulering van de gevraagde uitspraak in natuurlijke taal. In de antwoorden werd vaak niet verwezen naar de elementen in het model, wat natuurlijk nodig is om duidelijk te maken *waarom* de gevraagde formules al dan niet geldig zijn in het model.

Qua correctheid van het antwoord gingen de eerste 2 uitspraken verder vaak nog wel goed, maar bij de derde miste de helderheid die het herschrijven (zie hierboven) oplevert veelal. Als je $\neg\forall x$[uitspraak] tegenkomt, is het in het algemeen eigenlijk altijd handig om hier $\exists x\neg$[uitspraak] van te maken, omdat dan de negatie in de uitspraak verwerkt is en niet meer op de kwantor betrekking heeft. Daarnaast gaat het in dit specifieke geval om een disjunctie, met nog een negatie erin, en dat is lastig om je voor te stellen. Het feit dat je de negatie in de uitspraak mag verwerken nadat je $\neg\forall x$ hebt veranderd in $\exists x\neg$ maakt dat die uitspraak er beduidend makkelijker komt uit te zien.

(b) (6 punten) Maak een model met **precies 4 elementen** waarin de volgende uitspraken allemaal tegelijkertijd waar zijn, en leg uit waarom elk van de uitspraken geldt.

1. $\forall x[(Ax \wedge \neg Bx) \rightarrow \exists y(Ryx \wedge \neg By)]$
2. $\exists x[(\neg Ax \wedge \neg Bx) \wedge \exists y(Rxy \wedge Ay)]$
3. $\exists z[(\neg Az \wedge \neg Bz) \wedge \neg\exists y(Ay \wedge Rzy)]$
4. $\neg\forall x[Ax \vee (Bx \vee \neg Rxx)]$

Antwoord: Een mogelijk model is het volgende:



We beginnen met 2 cirkels voor de eigenschappen (of verzamelingen) A en B.

1. Deze uitspraak zegt dat voor alle elementen in $A - B$ (dus wel in A maar niet in B) er een element moet bestaan dat een relatie heeft met het element in $A - B$ en dat niet in B zit. Wanneer er geen elementen in $A - B$ zitten, is deze uitspraak waar, dus op zichzelf dwingt deze uitspraak ons niet een bepaald element toe te voegen.

2. Deze uitspraak zegt dat er een element x buiten A en B (dus in $(A \cup B)^c$) bestaat zodanig dat er een element y in A bestaat waarmee dit element een relatie heeft. Het gaat hier om respectievelijk elementen a en b. Merk op dat b niet in $A - B$ hoeft te zitten, het kan ook in $A \cap B$ zitten, maar in het huidige geval is b een element dat valt onder de voorwaarde in uitspraak 1, en moeten we verifiëren dat die uitspraak nog geldt in het model —dat blijkt zo te zijn, want a zit niet in B.

3. Deze uitspraak zegt ons een element z buiten A en B toe te voegen dat *geen* relatie met een element in A heeft. We voegen dus element c toe aan het model.

4. De laatste uitspraak gaan we eerst weer herschrijven:

$$\begin{aligned}
\neg\forall x[Ax \vee (Bx \vee \neg Rxx)] &\equiv \exists x \neg[Ax \vee (Bx \vee \neg Rxx)] \\
&\equiv \exists x[\neg Ax \wedge \neg(Bx \vee \neg Rxx)] \\
&\equiv \exists x(\neg Ax \wedge \neg Bx \wedge \neg\neg Rxx) \\
&\equiv \exists x(\neg Ax \wedge \neg Bx \wedge Rxx)
\end{aligned}$$

   Dit zegt ons dat er een element buiten A en B moet zijn dat een relatie met zichzelf heeft. Dit is het vierde element d.

Dit is een mogelijk model, er zijn andere die ook voldoen.

Commentaar: Ook bij deze opgave ging het vooral bij de laatste uitspraak vaak mis. Zie verder het commentaar bij 2.a.

3. Zij $A, B, C \in PROP$. Bewijs in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie volgens Fitch de volgende metabeweringen. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.

   (a) (5 punten) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

Antwoord:

1	$\mid A \to B$	hypothese 1
2	$\mid \mid \neg B$	hypothese 2
3	$\mid \mid \mid A$	hypothese 3
4	$\mid \mid \mid A \to B$	rei, 1
5	$\mid \mid \mid B$	$\to$-elim, 3, 4
6	$\mid \mid \mid \neg B$	rei, 2
7	$\mid \mid \neg A$	$\neg$-intro, 3, 5, 6
8	$\mid \neg B \to \neg A$	$\to$-intro, 2, 7
9	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$-intro, 1, 8

We moeten de implicatie $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ afleiden, dus beginnen we met de aanname $A \to B$ en proberen we $\neg B \to \neg A$ af te leiden. Die laatste is ook een implicatie, dus we nemen aan $\neg B$ en proberen $\neg A$ af te leiden. Dat kan uit het ongerijmde, dus we nemen aan A en moeten een contradictie afleiden. We hebben al $\neg B$ en kunnen met A en $A \to B$ ook B afleiden. Deze tegenspraak betekent dat de aanname A niet juist was, en dat dus $\neg A$ waar is.

Commentaar: Dit hebben velen goed gedaan. Het was duidelijk wie Fitch beheerste en wie niet, want wie dat wel deed maakte hier geen fouten mee. Er zijn verder niet echt conclusies te trekken over veelgemaakte fouten in de tweede categorie.

(b) (5 punten) $A \to B, \neg C \to \neg B \vdash A \to C$.

Antwoord:

1	$A \to B$	hypothese 1
2	$\neg C \to \neg B$	hypothese 2
3	A	hypothese 3
4	$\neg C$	hypothese 4
5	$\neg C \to \neg B$	rei, 2
6	$\neg B$	$\to$-elim, 6, 7
7	A	rei, 3
8	$A \to B$	rei, 1
9	B	$\to$-elim, 7, 8
10	$\neg\neg C$	$\neg$-intro, 4, 6, 9
11	C	$\neg$-elim, 10
12	$A \to C$	$\to$-intro, 3, 11

We beginnen met hypothese-intervallen voor de premissen $A \to B$ en $\neg C \to \neg B$. Nu moeten we de implicatie $A \to C$ afleiden, dus we beginnen met de aanname A en proberen C af te leiden. Dit kan weer uit het ongerijmde, dus nemen we $\neg C$ aan en proberen we een tegenspraak af te leiden. Uit $\neg C$ en $\neg C \to \neg B$ krijgen we $\neg B$ en uit A en $A \to B$ krijgen we B, wat een tegenspraak geeft, zodat de aanname $\neg C$ niet waar is, en C waar is.

Commentaar: Deze opdracht leverde meer problemen op dan de vorige. Vooral bleek het onduidelijk hoe om te gaan met de beide premissen vóór het $\vdash$ teken. Ik heb veel gezien dat mensen dit vervingen door $A \to B \wedge \neg C \to \neg B$ als eerste regel van de afleiding. Wat de gevraagde meta-bewering inhoudt is dat $A \to C$ afleidbaar is—niet in het algemeen, maar alleen in die situaties waarin $A \to B$ en $\neg C \to \neg B$ waar zijn. Je mag dus als hypothese aannemen dat die beide formules *waar zijn*, en je mag ze dan dus ook *gebruiken* in de afleiding van $A \to C$. Die laatste afleiding begint uiteraard (na de beide premissen als hypothese te hebben genomen) met de aanname dat A waar is (regel 3)—omdat dat de manier is om een implicatie als $A \to C$ te bewijzen—en het afleiden van C gebeurt dan uit het ongerijmde, wat hypothese $\neg C$ (regel 4) oplevert. Het is dan, nadat deze 4 hypothese-intervallen zijn geopend, onmiddelijk duidelijk dat $\neg C \to \neg B$ kan worden gebruikt om $\neg B$ te concluderen, en dat $A \to B$ kan worden gebruikt om B af te leiden. (Hypothesen 3 en 4 zijn precies de antecedenten in de implicaties die hypothesen 1 en 2 zijn, respectievelijk.) Op het moment dat dan C is afgeleid binnen het hypothese-interval van A (regel 11), mag $A \to C$ worden geconcludeerd, en dat is het einde van de afleiding. De hypothese-intervallen van hypothesen 1 en 2 worden niet gesloten, omdat $A \to C$ alleen maar waar hoeft te zijn (en ook waar is) onder de aanname van de beide premissen.

Hier en daar zijn ook nog fouten gemaakt met niet reïtereren van formules als in regels 5 en 8 hierboven, en soms met de tussenstap van regel 10: als je een contradictie hebt afgeleid, introduceer je de negatie van de hypothese die de contradictie heeft veroorzaakt (in dit geval $\neg C$), wat tot $\neg\neg C$ leidt, en niet direct tot C.

4. (a) Geef recursieve definities van de volgende functies.
   i. (2 punten) $\#_p : PROP \rightarrow \mathbb{N}$, waar $\#_p(F)$ het aantal propositiesymbolen in $F \in PROP$ is.

Antwoord: De functie $\#_p$ die aan een formule het aantal propositiesymbolen in die formule toekent, wordt recursief gedefinieerd als het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$\begin{aligned} \#_p(p_i) &= 1, \\ \#_p(\neg A) &= \#_p(A), \\ \#_p((A \star B)) &= \#_p(A) + \#_p(B) \end{aligned}$$

Commentaar: zie hieronder bij 4.a.ii.

   ii. (3 punten) $\#_2 : PROP \rightarrow \mathbb{N}$, waar $\#_2(F)$ het aantal 2-plaatsige connectieven in $F \in PROP$ is.

Antwoord: De functie $\#_2$ die aan een formule het aantal 2-plaatsige connectieven in die formule toekent, wordt recursief gedefinieerd als het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$\begin{aligned} \#_2(p_i) &= 0, \\ \#_2(\neg A) &= \#_2(A), \\ \#_2((A \star B)) &= \#_2(A) + \#_2(B) + 1 \end{aligned}$$

Commentaar: In de propositielogica zijn er maar 3 soorten formules: propositiesymbolen, en samengestelde proposities die ofwel een 1-plaatsig ofwel een 2-plaatsig connectief gebruiken. Dit zijn dus de 3 mogelijkheden die een recursieve definitie moet 'afdekken.' Alleen de eerste mogelijkheid is in dit geval *randvoorwaarde*, dus een situatie waarin de functie een natuurlijk getal als waarde heeft. In de andere situaties volgt een recursieve aanroep. Veel mensen hadden dit wel goed, en over de andere gevallen valt niet veel algemeens te zeggen: check in elk geval met een paar simpele voorbeeldformules of je recursieve functie de juiste waarde oplevert.

(b) (5 punten) Bewijs met structurele inductie over $PROP$ dat voor alle formules $F \in PROP$ geldt dat $\#_p(F) = \#_2(F) + 1$.

Antwoord: Laat $P(F)$ de te bewijzen eigenschap van een formule $F \in PROP$ zijn: $\#_p(F) = \#_2(F) + 1$. Het bewijs volgens structurele inductie over $PROP$ verloopt nu als volgt.

basisstap: voor $F = p_i$ geldt de eigenschap, want $\#_p(p_i) = 1$ en dat is $\#_2(p_i) + 1 = 0 + 1 = 1$.

inductiestap: We moeten bewijzen dat als de eigenschap geldt voor een formule A, hij ook geldt voor $\neg A$ en dat als de eigenschap geldt voor formules A en B, hij ook geldt voor $(A \star B)$, waar $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. We nemen dus aan —dit is de **inductiehypothese**, **IH**— dat de eigenschap geldt voor 2 willekeurige formules $A, B \in PROP$, m.a.w.: $\#_p(A) = \#_2(A) + 1$ en $\#_p(B) = \#_2(B) + 1$. Nu moeten we bewijzen dat de eigenschap ook geldt voor $\neg A$ en $(A \star B)$, waar $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

geval $\mathbf{F = \neg A}$: voor $F = \neg A$ geldt dat

$$\begin{aligned} \#_p(\neg A) &= \#_p(A) \\ &=_{\mathsf{IH}} \#_2(A) + 1 \\ &= \#_2(\neg A) + 1, \end{aligned}$$

dus geldt $P(\neg A)$.

geval $\mathbf{F} = (\mathbf{A} \star \mathbf{B})$: voor $F = (A \star B)$ geldt dat

$$\begin{aligned}\#_p((A \star B)) &= \#_p(A) + \#_p(B) \\ &=_{\mathsf{IH}(A)} \#_2(A) + 1 + \#_p(B) \\ &=_{\mathsf{IH}(B)} \#_2(A) + 1 + \#_2(B) + 1 \\ &= \#_2((A \star B)) + 1,\end{aligned}$$

dus geldt $P((A \star B))$.

Volgens het principe van inductie naar de opbouw van de formules in $PROP$ geldt nu dat de eigenschap geldt voor alle formules $F \in PROP$.

Commentaar: Hier ben ik de meest uiteenlopende foute antwoorden tegen gekomen (naast een aantal goede antwoorden uiteraard, maar in de meeste gevallen mankeerde er toch wel wat). Een paar algemene opmerkingen hierover. Ten eerste lijkt de algemene structuur van een inductiebewijs niet helemaal duidelijk. Denk aan de dominostenen die ik op het college heb laten omvallen: het bewijs moet de eerste steen laten vallen, en bovendien laten zien dat als een steen valt, dan de volgende ook valt. Tenslotte moet je het principe van structurele inductie (principe van inductie naar de opbouw (of structuur) van formules in PROP) aanroepen (zie mijn handout over bewijzen met gevalsonderscheid en inductie op Blackboard). Het type fout dat ik het vaakst ben tegengekomen, is dat in het bewijzen van de inductiestap (gevallen $F = \neg A$ en $F = (A \star B)$) allemaal getallen werden ingevuld voor functiewaarden die in de recursieve definitie helemaal niet voorkwamen. Als in je recurrente betrekking staat dat $\#_2(\neg A) = \#_2(A)$, dan kan in je bewijs niet plotseling $\#_2(\neg A) = \#_2(A) = 0$ voorkomen of zoiets dergelijks.

Het bewijs moet aantonen dat alle formules $F \in \mathrm{PROP}$ een bepaalde eigenschap hebben, dus begin met het benoemen van die eigenschap, en geef hem een naam (bijvoorbeeld $P(F)$ voor Property van formule F of $E(F)$ voor Eigenschap van F). De eerste steen laten vallen doet de **basisstap**, die gaat over formules die uit enkel een propositieletter bestaan. Hebben dergelijke formules de eigenschap $P(F)$? Dan moet voor die formules gelden dat $\#_p(F)$ gelijk is aan $\#_2(F) + 1$. In dit geval kunnen we gewoon de getallen invullen die deze beide functies hebben als $F = p_i$ (zie de recursieve definitie uit opgave 4.a.), namelijk $\#_p(p_i) = 1$ en $\#_2(p_i) = 0$. In dat geval geldt inderdaad dat

$$\#_p(p_i) = 1 = 0 + 1 = \#_2(p_i) + 1.$$

Merk op dat ik helemaal links begin met de linkerkant van de eigenschap $P(F)$ en helemaal rechts eindig met de rechterkant van de eigenschap, daarmee vaststellend dat de eigenschap inderdaad geldt voor formules $F = p_i$. Deze aanpak geldt zowel voor $F = p_i$ als voor de beide andere gevallen $F = \neg A$ en $F = (A \star B)$. In de volgende stap, de **inductiestap**, moeten we namelijk laten zien dat *als* de eigenschap geldt voor formule $F = A$ en B, *dan* de eigenschap ook geldt voor $F = \neg A$ en voor $F = (A \star B)$. Deze *implicatie* (want dat is het) bewijzen we als altijd door het antecent voor waar aan te nemen (deze aanname noemen we de **inductiehypothese**), en het consequent af te leiden. Benoem die inductiehypothese: Stel dat $P(F)$ geldt voor $F = A, B \in \mathrm{PROP}$, oftewel: $\#_p(A) = \#_2(A) + 1$ en $\#_p(B) = \#_2(B) + 1$. Voor de beide gevallen van samengestelde proposities gaat het bewijs op dezelfde van-links-naar-rechts manier als in de basisstap, alleen mogen we hier de inductiehypothese gebruiken voor een van de tussenstappen. Dus: begin met de linkerkant van de eigenschap, neem de toepasselijke regel uit je recursief gedefinieerde functie, pas de inductiehypothese toe, en eindig met de rechterkant van de gewenste eigenschap (zie het antwoord hierboven). Je kunt dus altijd zien of je combinatie van recursieve definitie en inductiebewijs kloppen: je gebruikt de definitie in het bewijs, dus beiden moeten met elkaar in overeenstemming zijn.

Ik heb *heel veel* mensen fouten zien maken waarbij niet alleen in de basisstap, maar ook in de inductiestap gewoon getallen (zoals 0 en 1) werden ingevuld, om tot een soortgelijke serie stappen als in de basisstap te kunnen komen, en op basis van gelijkheid van $1 = 1$ (of iets dergelijks) te kunnen concluderen: "dus het klopt!" Je moet inderdaad de recursieve definitie uit 4.a. in het inductiebewijs gebruiken, maar doe dat dan consistent.

5. (a) (2 punten) Geef de definitie van $\mathscr{P}(A)$, de machtsverzameling van een verzameling A.

> **Antwoord:** $\mathscr{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ is de verzameling van alle deelverzamelingen van de verzameling A.

(b) Zij A en B verzamelingen. Ga na of de volgende stellingen juist of onjuist zijn. Geef een bewijs, respectievelijk een tegenvoorbeeld in de vorm van specifieke verzamelingen A en B (en C).

i. (4 punten) Als $A \subseteq B$ en $A \subseteq C$, dan $A \subseteq B \cap C$.

> **Antwoord:** Deze bewering is juist. Stel $A \subseteq B$ en $A \subseteq C$. We moeten bewijzen dat $A \subseteq B \cap C$. Neem een willekeurige $x \in A$. Omdat $A \subseteq B$ geldt ook $x \in B$ en omdat $A \subseteq C$ geldt ook $x \in C$. Nu geldt dus $x \in B$ en $x \in C$, dus geldt $x \in B \cap C$. Dit geldt voor alle x in A, dus geldt $A \subseteq B \cap C$.
> **Commentaar:** Je moet eerst een idee krijgen over of deze uitspraak al dan niet juist is. Stel je de situatie voor: A is een deelverzameling van B en ook van C, dus alle elementen van A zitten zowel in B als in C, dus in de doorsnede van B en C. De uitspraak is dus juist, nu nog correct opschrijven. De uitspraak is een implicatie, dus het bewijs verloopt als altijd door het antecedent voor waar aan te nemen (schrijf dus op: "Stel dat $A \subseteq B$ en $A \subseteq C$.") en het consequent te bewijzen. Als je voor die tweede stap moet bewijzen dat een verzameling A deelverzameling van een andere verzameling $B \cap C$ is, dan moet elk element van A ook element van $B \cap C$ zijn. Dit kun je aantonen door voor een *willekeurig* element van A, zeg x, waarover je dus niks anders aanneemt dan dat het element van A is, te laten zien dat het ook element van $B \cap C$ is. Aangezien x *willekeurig* gekozen was, geldt dus voor *elk* element van A dat het element van $B \cap C$ is, en dat A dus deelverzameling van $B \cap C$ is.
> De manier om bewijzen over verzamelingen te leveren moet je in je hoofd hebben zitten (zie o.a. de slides van college 10). Ook de definities van deelverzameling, doorsnede, vereniging en dergelijke moet je paraat hebben. Degenen die het antwoord (juist of onjuist) goed hadden, kwamen toch niet allemaal tot een verantwoorde uitleg, meestal omdat de algemene structuur van het bewijs niet voldoende tot uitdrukking kwam, dus maak je verhaal zo duidelijk mogelijk, en volg de algemene vorm van een bewijs over een stelling zoals je probeert te bewijzen.

ii. (4 punten) $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

> **Antwoord:** Deze bewering is onjuist. De machtsverzameling van de vereniging van twee verzamelingen heeft $2^{|A \cup B|}$ elementen, en de som van de machtsverzamelingen van A en B maar $2^{|A|} + 2^{|B|}$, wat in de meeste gevallen minder is. Het geldt bijvoorbeeld weliswaar niet in het geval van de verzamelingen $A = \{0\}$ en $B = \{1\}$, maar die vormen toch een tegenvoorbeeld. De machtsverzameling van A is $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}\}$, en de machtsverzameling van B is $\mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$, dus $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$. De vereniging van A en B is $A \cup B = \{0, 1\}$ en de machtsverzameling daarvan is $\mathscr{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. De verzameling $\{0, 1\}$ is dus wel element van $\mathscr{P}(A \cup B)$, maar niet van $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.
> **Commentaar:** Vooropgesteld dat je het juiste idee van een machtsverzameling hebt, zou het weinig moeite moeten kosten om in te zien dat deze uitspraak onjuist is. Als je niet weet of een uitspraak juist of onjuist is, helpt het om naar een tegenvoorbeeld te zoeken, vooral als pogingen om een bewijs te vinden stranden. Zo'n tegenvoorbeeld vind je in dit geval al snel, zelfs met zulke simpele verzamelingen als $\{0\}$ en $\{1\}$.

6. **Deze opgave is voor studenten die vóór 2008 Logica hebben gevolgd.**

Zij $A, B \in PROP$. Ga voor elk van de volgende metabeweringen na of deze juist danwel onjuist is. Geef voor elke metabewering een bewijs, respectievelijk een tegenvoorbeeld in de vorm van proposities A en B waarvoor de bewering onjuist is.

(a) (5 punten) Als $A \models B$ en $\models \neg A$, dan $\models \neg B$.

Antwoord: Deze bewering is onwaar. Stel dat $A \models B$ en dat $\models \neg A$. We weten dan dus dat voor alle valuaties geldt dat als een valuatie model is voor A, hij dan ook model is voor B. Maar uit het feit dat alle valuaties $\neg A$ waar maken, kunnen we over B niks concluderen.

Neem bijvoorbeeld $A = p \wedge \neg p$ en $B = p$. Dan geldt $\models \neg A$, want $p \wedge \neg p$ is een contradictie, en dus maken alle valuaties $\neg(p \wedge \neg p)$ waar. Alle valuaties die A waarmaken (die bestaan niet) maken ook B waar, dus geldt ook $A \models B$ (ex falso quodlibet sequitur). Maar beschouw nu de valuatie v met $v(p) = 1$. Die maakt $\neg B$ onwaar, dus is de bewering onjuist.

Commentaar: De bewering is een implicatie, dus een bewijs stelt (als altijd) het antecedent voor waar en probeert het consequent af te leiden. Zoals hierboven besproken werkt dat niet: je kunt over B niets concluderen als je het antecedent voor waar hebt aangenomen. Als je vermoedt dat de stelling onjuist is, heb je dus bij wijze van tegenvoorbeeld een situatie nodig waarin het antecedent waar is en het consequent onwaar.

Als de beide beweringen in het antecedent waar moeten zijn, is met name de tweede ($\models \neg A$) van belang. Als alle valuaties uitspraak $\neg A$ waar moeten maken, moet A een contradictie zijn, bijvoorbeeld $A = p \wedge \neg p$. Dan is gelijk $A \models B$ waar (*onafhankelijk* van wat B is), want er zijn dan geen valuaties die A waar maken (die zijn er dan überhaupt niet), en tegelijkerijd B onwaar. Het is dan simpel om een B te verzinnen met een valuatie die B onwaar maakt, bijvoorbeeld $B = p$ met een valuatie v met $v(p) = 1$.

(b) (5 punten) Als $\neg A \models A$, dan $\models A$.

Antwoord: Deze bewering is waar. Stel dat $\neg A \models A$. Dat betekent dat voor alle valuaties v geldt dat als $v(\neg A) = 1$, dan $v(A) = 1$. We moeten bewijzen dat $\models A$, ofwel dat voor alle valuaties v geldt $v(A) = 1$. Stel dat er een valuatie v bestaat waarvoor $v(A) = 0$, ofwel $v(\neg A) = 1$. Dan zou uit $\neg A \models A$ volgen dat $v(A) = 1$, hetgeen een tegenspraak oplevert. Er bestaan dus geen valuaties waarvoor $v(A) = 0$. Met andere woorden voor alle v geldt $v(A) = 1$, zodat $\models A$.

Commentaar: Wederom een implicatie, dus een bewijs moet verlopen door het antecedent voor waar aan te nemen, en het consequent af te leiden. Je ziet eigenlijk gelijk al dat de bewering waar is: valuaties die, als ze $\neg A$ waar maken, ook A waar maken, kunnen niet bestaan. Er zijn dus geen valuaties die $\neg A$ waar maken, dus maken alle valuaties A waar, en is A een tautologie ($\models A$). Het bewijs verloopt als hierboven uitgelegd.

Einde tentamenopgaven