TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen IN1305-I
Fundamentele Informatica I: Logica

31 oktober 2007, 9.00–12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 1.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 50.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 10 punten op.
- Het eindcijfer c wordt bepaald volgens de formule $c = \frac{9}{50} \cdot$ (aantal punten) $+ 1$.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- Voordat u uw antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje uw naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. (a) (3 punten) Geef de definitie van het begrip *valuatie*.

> **Antwoord:** Een *valuatie* is een functie die waarheidswaarden toekent aan de propositiesymbolen van een propositionele taal. Hiermee wordt de waarheidswaarde van iedere formule $A \in$ PROP vastgelegd. Vergelijk dit met de *rijen* van waarheidstabellen.

(b) (7 punten) Zij p_1, p_2, p_3 en p_4 propositiesymbolen. Beschouw de formule

$$((p_1 \wedge p_3) \vee (\neg p_2 \to (p_3 \to p_4))).$$

Is het mogelijk deze formule *waar* te maken door aan slechts één propositiesymbool een specifieke waarheidswaarde toe te kennen ongeacht wat de waarheidstoekenningen aan de overige propositiesymbolen zijn? Licht uw antwoord toe!

> **Antwoord:** Neem een valuatie v waarvoor geldt dat $v(p_2) = 1$. In dat geval geldt $v(\neg p_2) = 0$ zodat $v((\neg p_2 \to (p_3 \to p_4))) = 1$ (immers de linkerkant van de implicatie is onwaar). Hieruit volgt $v(((p_1 \wedge p_3) \vee (\neg p_2 \to (p_3 \to p_4)))) = 1$. Andere mogelijkheden: neem $v(p_3) = 0$ of $v(p_4) = 1$; ook $v(p_1) = 1$ voldoet (ga zelf na).

2. (a) (3 punten) Zij $\Gamma \subseteq PROP$ en zij $A \in PROP$. Definieer wat de betekenis is van $\Gamma \models A$.

> **Antwoord:** $\Gamma \models A$ betekent dat A een *logisch gevolg* is van Γ, hetgeen inhoudt dat ieder *model* voor Γ een model voor A is. Ofwel voor iedere valuatie v met $v(F) = 1$ voor alle $F \in \Gamma$, geldt $v(A) = 1$.

(b) (7 punten) Zij $A, B \in PROP$. Bewijs de volgende metabewering:

$$\text{Als } A \models B, \text{ dan } A \models A \to B.$$

Let op: U mag in het bewijs geen gebruik maken van waarheidstafels of de methode van Fitch! Uw bewijs dient een goed leesbaar, samenhangend betoog te zijn!

> **Antwoord:** Stel $A \models B$. Zij verder v een willekeurige valuatie zodat $v(A) = 1$. We moeten dan laten zien dat $v(A \to B) = 1$.
> Omdat $v(A) = 1$ en $A \models B$, geldt ook $v(B) = 1$. Nu volgt $v(A \to B) = \max(1 - v(A), v(B)) = \max(0, 1) = 1$. ■

3. (a) (2 punten) Geef een *recursieve definitie* van de functie con waarbij $con(A)$ gelijk is aan het *aantal connectieven* in A voor een gegeven $A \in PROP$.

> **Antwoord:**
> $$\begin{cases} con(p_i) & = & 0 \quad (i \in \mathbb{N}) \\ con(\neg A) & = & con(A) + 1 \\ con((A \star B)) & = & con(A) + con(B) + 1 \end{cases}$$

Einde tentamenopgaven

(b) (3 punten) Geef een *recursieve definitie* van de functie sym waarbij $sym(A)$ gelijk is aan de *verzameling* (dus *niet* het aantal) *propositiesymbolen* die voorkomen in een propositionele formule A. Bijvoorbeeld $sym(((p_1 \wedge p_2) \to p_1)) = \{p_1, p_2\}$.

Antwoord:

$$\begin{cases} sym(p_i) & = & \{p_i\} \quad (i \in \mathbb{N}) \\ sym(\neg A) & = & sym(A) \\ sym((A \star B)) & = & sym(A) \cup sym(B) \end{cases}$$

(c) (5 punten) Zij $|V|$ gedefinieerd als het *aantal elementen* in de verzameling V. Bewijs met behulp van structurele inductie de volgende uitspraak:

Voor alle $A \in PROP$ geldt $con(A) + 1 \geq |sym(A)|$.

Hint: Gebruik hierbij de eigenschap dat voor verzamelingen V en W geldt: $|V| + |W| \geq |V \cup W|$.

Antwoord:
Basisstap: $con(p_i) + 1 = 0 + 1 = 1 \geq 1 = |\{p_i\}| = |sym(p_i)|$.
Inductiehypothese (IH): $con(A) + 1 \geq |sym(A)|$ en $con(B) + 1 \geq |sym(B)|$ als $A, B \in PROP$.
Inductiestap:

- $con(\neg A) + 1 = con(A) + 1 + 1 \geq con(A) + 1 \geq_{IH} |sym(A)| = |sym(\neg A)|$.
- $con((A \star B)) + 1 = con(A) + con(B) + 1 + 1 = con(A) + 1 + con(B) + 1 \geq_{IH}$ $|sym(A)| + |sym(B)| \geq |sym(A) \cup sym(B)| = |sym((A \star B))|$. ■

4. Zij gegeven dat A en B éénplaatsige predicaatsymbolen zijn. Bewijs met behulp van het systeem van Fitch (zoals op het college behandeld, dus *niet* het uitgebreide systeem van Fitch) de volgende beweringen:

(a) (5 punten) $\vdash \neg\exists x Ax \to \forall x \neg Ax$.

Antwoord:

1.	$\mid \neg\exists x Ax$	hypothese
2.	$\mid \mid Aa$	hypothese
3.	$\mid \mid \exists x Ax$	$\exists$ intro 2
4.	$\mid \mid \neg\exists x Ax$	rei 1
5.	$\mid \neg Aa$	$\neg$ intro 2,3,4
6.	$\mid \forall x \neg Ax$	$\forall$ intro 5
7.	$\neg\exists x Ax \to \forall x \neg Ax$	$\to$ intro 1,6

(b) (5 punten) $\exists x(Ax \wedge Bx) \vdash \exists x Ax \wedge \exists x Bx$.

Antwoord:

1.	$\exists x(Ax \land Bx)$	hypothese
2.	$\quad a : Aa \land Ba$	hypothese
3.	$\quad Aa$	$\land$ elim 2
4.	$\quad Ba$	$\land$ elim 2
5.	$\quad \exists x Ax$	$\exists$ intro 3
6.	$\quad \exists x Bx$	$\exists$ intro 4
7.	$\quad \exists x Ax \land \exists x Bx$	$\land$ intro 5,6
8.	$\exists x Ax \land \exists x Bx$	$\exists$ elim 1,2,7

5. Beschouw de volgende uitspraken over verzamelingen. Ga na of deze geldig dan wel niet geldig zijn voor willekeurige verzamelingen A, B en C. Geef in geval dat een uitspraak geldig is een bewijs en in het geval dat dit niet zo is een tegenvoorbeeld van verzamelingen A, B en C waarvoor de uitspraak onjuist is.

   (a) (5 punten) $A - B = (A \cup C) - (B \cup C)$.

   Antwoord: Deze uitspraak is onjuist. Neem als tegenvoorbeeld: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ en $C = \{3, 5\}$. Dan geldt $A - B = \{2, 3\}$ en $(A \cup C) - (B \cup C) = \{1, 2, 3, 5\} - \{1, 3, 4, 5\} = \{2\}$. Deze verzamelingen zijn evident niet gelijk.

   (b) (5 punten) Als $A \cup B \subseteq C$, dan $A \in \mathscr{P}(C)$ en $B \in \mathscr{P}(C)$.

   Antwoord: Als $A \cup B \subseteq C$, dan geldt per definitie dat $x \in C$ voor alle $x \in A \cup B$. In het bijzonder volgt hieruit dat $x \in C$ als $x \in A$ en ook $x \in C$ als $x \in B$, ofwel $A \subseteq C$ en $B \subseteq C$. Dit betekent dat $A \in \mathscr{P}(C)$ en $B \in \mathscr{P}(C)$. ■

Vanmiddag zullen de uitwerkingen van dit tentamen op Blackboard worden gepubliceerd.