TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4
2628 CD Delft

IN1305 I Fundamentele Informatica 1, deel I
Deeltentamen, maandag 30 oktober 2006, 9.00–11.00 uur

BELANGRIJK

Beschikbare tijd: 2 uur.
Bij dit deeltentamen mogen geen boeken, dictaten of ander materiaal worden geraadpleegd.
Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
Voor elke opgave zijn 10 punten te verdienen.
Alle opgaven tellen even zwaar mee.
Voor een voldoende zijn 25 punten benodigd.
Het de bedoeling iedere opgave te beginnen op een nieuwe zijde.

---

1. Zij p, q en r propositieletters van een propositioneel logische taal.

   (a) (5 punten) Ga met de waarheidstafelmethode na of de onderstaande formule al dan niet een tautologie is. Geef ook een tegenmodel mocht dit niet het geval zijn.

   $$((p \to q) \to r) \to (p \to (q \to r)).$$

   Uitwerking

p	q	r	$((p$	$\to$	$q)$	$\to$	$r)$	$\to$	$(p$	$\to$	$(q$	$\to$	$r))$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
								↑					

   Uit deze waarheidstafel blijkt dat de gegeven formule een tautologie is: in de kolom van het hoofdvoegwoord (zie ↑) komt immers alleen de waarheidswaarde 1 voor.

   (b) (5 punten) Zij Γ een verzameling proposities en zij F een propositie. Leg uit hoe men met behulp van de waarheidstafelmethode kan nagaan of $\Gamma \;\therefore F$ een geldige redenering voorstelt.

   Uitwerking

   In alle rijen waarvoor geldt dat alle premissen in Γ de waarheidswaarde 1 bezitten, dient ook de conclusie F de waarheidswaarde 1 te hebben.

2. Deze vraag heeft betrekking op de notie van logisch gevolg in de propositielogica.

   Ge na of de volgende bewering juist of onjuist is. Geef in het eerste geval een overtuigend bewijs en in het tweede geval een tegenvoorbeeld. Bij het geven van een bewijs is het niet toegestaan afleidingen in het systeem van Fitch of waarheidstafels te gebruiken. In plaats daarvan dient de definitie van "$\models$" te worden toegepast.

   Voor alle $A \in PROP$ geldt: als $\neg A \models A$, dan $\models A$.

   Uitwerking

   De bewering is juist.

   Bewijs Stel $\neg A \models A$. We zullen uit het ongerijmde bewijzen dat voor alle valuaties v geldt $v(A) = 1$. Stel dus dat $v(A) = 0$ voor zekere valuatie v. Hieruit volgt dat $v(\neg A) = 1$. We hebben aangenomen dat $\neg A \models A$, hetgeen betekent: als $v(\neg A) = 1$, dan ook $v(A) = 1$. We concluderen dus dat $v(A) = 1$, wat in tegenspraak is met wat we hebben gesteld, namelijk $v(A) = 0$. Hiermee is de uitspraak bewezen. $\square$

3. Zij p, q en r propositieletters van een propositioneel logische taal. Bewijs de volgende stellingen in het (niet-uitgebreide) systeem van natuurlijke deductie volgens Fitch (dus *niet* met waarheidstabellen!):

   (a) (4 punten) $\vdash (p \wedge \neg p) \to q$.

   Uitwerking

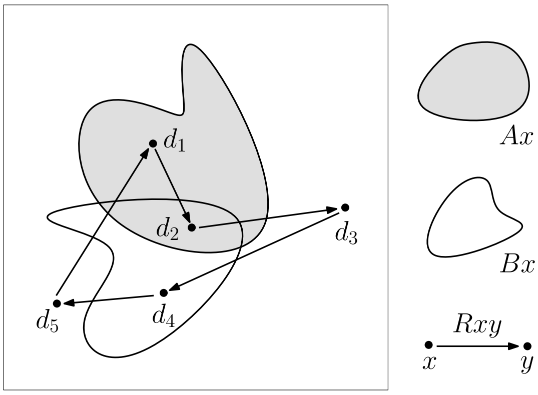
1.	$\vert\ p \wedge \neg p$	hypothese
2.	$\vert\ \vert\ \neg q$	hypothese
3.	$\vert\ \vert\ p \wedge \neg p$	rei, 1
4.	$\vert\ \vert\ p$	$\wedge$-elim, 3
5.	$\vert\ \vert\ \neg p$	$\wedge$-elim, 3
6.	$\vert\ \neg\neg q$	$\neg$-intro, 2, 4, 5
7.	$\vert\ q$	$\neg$-elim, 6
8.	$(p \wedge \neg p) \to q$	$\to$-intro, 1, 7

   (b) (6 punten) $\vdash ((p \vee q) \wedge (p \to r)) \to (q \vee r)$.

   Uitwerking

1.	$\vert\ (p \vee q) \wedge (p \to r)$	hypothese
2.	$\vert\ p \vee q$	$\wedge$-elim, 1
3.	$\vert\ p \to r$	$\wedge$-elim, 1
4.	$\vert\ \vert\ p$	hypothese
5.	$\vert\ \vert\ p \to r$	rei, 3
6.	$\vert\ \vert\ r$	$\to$-elim, 4, 5
7.	$\vert\ \vert\ q \vee r$	$\vee$-intro, 6
8.	$\vert\ \vert\ q$	hypothese
9.	$\vert\ \vert\ q \vee r$	$\vee$-intro, 8
10.	$\vert\ q \vee r$	$\vee$-elim, 2, 7, 9
11.	$((p \vee q) \wedge (p \to r)) \to (q \vee r)$	$\to$-intro, 1, 10

4. (a) (4 punten) Beschouw het onderstaande (informele) model met vijf objecten.



Ga na welke van de volgende uitspraken waar zijn in dit model. Vertaal daartoe eerst de bewering in eigen woorden en motiveer vervolgens kort het antwoord.

i. $\forall x[(Ax \wedge Bx) \rightarrow \exists y Rxy]$.

Uitwerking
Voor alle x geldt: als x zowel in A als in B zit (of, anders gezegd, zowel de eigenschap A als B bezit), dan is er een y zodanig dat x in de relatie R tot y staat.
Deze uitspraak is waar: alleen d_2 zit zowel in A als in B, en de gezochte y is d_3, want vanuit d_2 loopt een pijl naar d_3.

ii. $\forall x \exists y \exists z[Rxy \wedge Ryz]$.

Uitwerking
Voor alle x bestaat er een y en z met: x staat in de relatie R tot y, en y staat in de relatie R tot z.
Deze uitspraak is waar. Neem namelijk een punt x (bijvoorbeeld d_4) en je kunt altijd zo'n y en z vinden door de "pijlen te volgen" (bij d_4 zijn dit d_5 en d_1) .

iii. $\forall x \forall y[Rxy \vee (Ax \rightarrow By)]$.

Uitwerking
Voor alle x en y geldt: x staat in de relatie R tot y, of als x in A ligt, dan ligt y in B.
Deze uitspraak is onwaar. Neem voor x object d_1 en voor y object d_3. Dan geldt niet dat d_1 in de relatie R tot d_3 staat. Bovendien geldt dat d_1 in A ligt, maar d_3 niet in B, zodat voor deze x en y ook $Ax \rightarrow By$ onwaar is.

iv. $\exists x \exists y[Rxy \rightarrow Ryx]$.

Uitwerking
Er zijn x en y waarvoor geldt: als x in de relatie R tot y staat, dan geldt ook dat y in de relatie R tot x staat.
Deze uitspraak is waar. Neem bijvoorbeeld voor x en y beide het object d_3. Dan is de linkerkant van de implicatie Rxy onwaar en de implicatie derhalve waar.

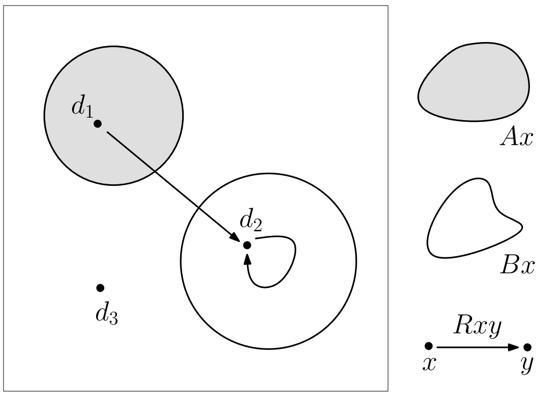
(b) (6 punten) Vertaal de volgende formules in uw eigen woorden en geef vervolgens een (informeel) model met precies drie objecten waarin deze formules alle vier tegelijk waar zijn. Teken uw informele model op dezelfde wijze als in het vorige deel van deze opgave is gedaan.

i. $\forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \rightarrow Ryz]$.
ii. $\forall x[Ax \rightarrow \neg Bx]$.
iii. $\exists x \exists y[Ax \wedge By \wedge Rxy]$.
iv. $\neg \forall x[\neg Ax \rightarrow Bx]$.

Uitwerking
Eerst vertalen we de formules in onze eigen woorden:

i. Voor alle x, y en z geldt: als x in de relatie R tot y en z staat, dan staat y in de relatie R tot z. (R wordt dan een *Euclidische* relatie genoemd.)
ii. Voor alle x geldt: als x in A ligt, dan ligt x niet in B. Dat wil zeggen dat A en B *disjunct* zijn.
iii. Er bestaan x en y waarvoor geldt: x ligt in A, y ligt in B, en x staat in de relatie R tot y.
iv. Niet voor alle x geldt: als x niet in A ligt, dan ligt x in B. Dit betekent: er ligt een object buiten A en B.

In het volgende model zijn deze 4 uitspraken tegelijkertijd waar:



De formules iii en iv samen met de eis dat het model precies 3 objecten moet bevatten, zorgen ervoor dat er 1 object in A ligt, 1 in B en 1 buiten A en B, en dat er een pijl loopt van d_1 naar d_2. Formule ii dwingt af dat A en B geen objecten gemeen hebben. Uit formule i volgt dat d_2 in de relatie R tot zichzelf staat (neem d_1 voor x en d_2 voor zowel y als z). Er mogen meerdere pijlen in het model staan, mits aan de eis van Euclidiciteit is voldaan.

5. Zij A, B en C verzamelingen in een universele verzameling U. Toon de volgende twee beweringen aan. (*Hint:* gebruik de definities van de verzamelingsoperaties; een Venn-diagram alleen volstaat *niet.*)

(a) (4 punten)
Als $A \in \mathscr{P}(C)$ en $B \in \mathscr{P}(C)$, dan $A \cup B \subseteq C$.

Uitwerking
Stel $A \in \mathscr{P}(C)$ en $B \in \mathscr{P}(C)$. Als $A \in \mathscr{P}(C)$ dan geldt $A \subseteq C$ (definitie $\mathscr{P}(C)$). Evenzo, als $B \in \mathscr{P}(C)$ dan $B \subseteq C$.
Stel nu $x \in A \cup B$. Dan zijn er twee mogelijkheden:
Als $x \in A$, dan moet $x \in C$, aangezien $A \subseteq C$ (definitie $\subseteq$).
Als $x \in B$, dan moet $x \in C$, aangezien $B \subseteq C$ (definitie $\subseteq$).
In beide gevallen geldt dus $x \in C$, waarmee is bewezen $A \cup B \subseteq C$.

(b) (6 punten)
$(A - B)^c = A^c \cup B$.

Uitwerking
We bewijzen deze uitspraak met een reeks equivalente uitspraken:
$x \in (A - B)^c$
d.e.s.d.a. niet $x \in (A - B)$
d.e.s.d.a. niet [$x \in A$ en $x \notin B$]
d.e.s.d.a. [niet $x \in A$] of [niet $x \notin B$]
d.e.s.d.a. $x \in A^c$ of $x \in B$
d.e.s.d.a. $x \in A^c \cup B$.
Hiermee is het gestelde bewezen.

Einde tentamenopgaven