

Tentamen Maat en Integratietheorie
9 april 2010, 14.00 - 17.00

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd!

Puntenverdeling: $(1+1) + 1\frac{1}{2} + 2 + 1\frac{1}{2} + 2 + (1 \text{ gratis})$

1. Laat X en Y verzamelingen zijn en $T : X \rightarrow Y$ een afbeelding. Zij $\mathcal{C}$ een collectie deelverzamelingen van Y en definieer $T^{-1}(\mathcal{C}) = \{T^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$.

(a) Toon aan dat $T^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(T^{-1}(\mathcal{C}))$.

(b) Neem $X = Y = \mathbb{R}$, $T(x) = x^2$, en $\mathcal{C} = \{(a, b) : 0 < a < b < 1\}$. Bepaal $T^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

2. Bewijs dat de som en het product van twee meetbare functies meetbaar zijn.

Aanwijzing: De formule $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$ kan wat werk besparen.

3. Zij $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ een kansruimte. Twee meetbare functies ('kansvariabelen') $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ en $f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ heten *onafhankelijk* als voor ieder tweetal Borel sets B_1, B_2 in $\mathbb{R}$ geldt

$$\mathbb{P}(\{f_1 \in B_1\} \cap \{f_2 \in B_2\}) = \mathbb{P}(\{f_1 \in B_1\})\mathbb{P}(\{f_2 \in B_2\}).$$

Hier gebruiken we de notatie $\{f \in B\} = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Toon aan: als f_1 en f_2 niet-negatief en onafhankelijk zijn, dan geldt

$$\int_X f_1 f_2 d\mathbb{P} = \int_X f_1 d\mathbb{P} \cdot \int_X f_2 d\mathbb{P}.$$

Aanwijzing: Benader f_1 en f_2 met behulp van onafhankelijke simpele functies.

4. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een eindige maatruimte en zij $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ strict positief en meetbaar en neem aan dat $\int_X f d\mu = 1$. Toon aan dat

$$\int_X \ln f d\mu \leq \frac{\mu(X)}{\ln(\mu(X))}.$$

5. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar. Bepaal $\mathbb{E}(f|\sigma(g))$, waarbij $g(x) = x^2$.

Aanwijzing: Bepaal eerst $\sigma(g)$ en probeer het antwoord dan te raden. Maak het argument vervolgens precies.

-- einde --