

TENTAMEN COMBINATORISCHE OPTIMALISERING (WI3612)

26 JUNI, 9.00–12.00 UUR.

In onderstaande opgaven wordt steeds aangenomen dat de grafen enkelvoudig (simple) zijn. Geef altijd een duidelijke argumentatie bij iedere bewering. Veel succes!

Opgave 1

Zij $G = (V, E)$ een samenhangende 4-reguliere graaf in het vlak. De rand van elk facet is een cykel van lengte 3 of lengte 4.

- Bepaal het aantal facetten waarvan de rand een cykel van lengte 3 is.
- Neem aan dat van precies 2013 facetten de rand een cykel van lengte 4 is. Bepaal de dimensie van de cykelruimte van G en de dimensie van de cykelruimte van de duale G^* .

Oplossing. Noem het aantal punten in de graaf n en het aantal lijnen m . Noem het aantal facetten dat als rand een 3-cykel en een 4-cykel hebben respectievelijk f_3 en f_4 .

- Omdat G vlak en samenhangend is geldt de formule van Euler: $n + f_3 + f_4 = m + 2$. Omdat de graaf 4-regulier is, geeft sommeren van de graden dat $4n = 2m$. De duale graaf heeft f_3 punten van graad 3 en f_4 punten van graad 4, dus $3f_3 + 4f_4 = 2m$. We vinden zo dat

$$\begin{aligned} 4n + 4f_3 + 4f_4 &= 4m + 8 \\ -3f_3 - 4f_4 &= -2m \\ -4n &= -2m. \end{aligned}$$

Optellen van de vergelijkingen geeft $f_3 = 8$.

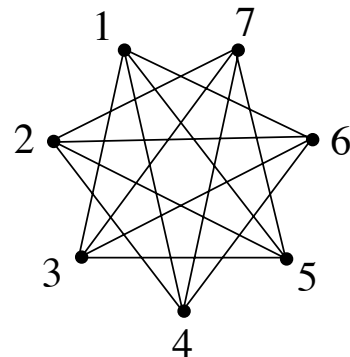
- Omdat $f_4 = 2013$ vinden we dat $m = 4038$ en $n = 2019$. De dimensie van de cykelruimte is $m - n + 1 = 2020$. De dimensie van de cykelruimte van G^* is gelijk aan de dimensie van de snederuimte van G , dus $n - 1 = 2018$.

■

Opgave 2

Beschouw de graaf $G = \overline{C_7}$ in de figuur. Geef bij het beantwoorden van de volgende vragen steeds een korte argumentatie.

- Heeft G een Eulertoer?
- Heeft G een Hamiltoncykel?
- Is G een vlakke graaf?
- Bepaal het lijnkleurgetal $\chi'(G)$.
- Bepaal $mc(G)$.



Oplossing.

- Omdat G samenhangend is en elk punt even graad heeft, heeft G een Eulertoer.
- De cykel $(1, 3, 5, 7, 2, 4, 6, 1)$ is een Hamiltoncykel in G .
- Samentrekken van lijnen $\{1, 4\}$ en $\{2, 6\}$ geeft K_5 . De graaf G is dus niet vlak.

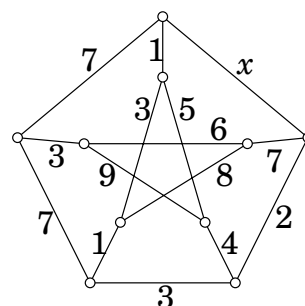
- d) Er geldt $\chi'(G) = 5$. Volgens de stelling van Vizing is $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 = 5$. Dat $\chi'(G) > 4$ geldt volgt uit het feit dat elke matching hoogstens 3 lijnen heeft, zodat met 4 kleuren niet meer dan 12 van de 14 lijnen kunnen worden gekleurd.
- e) De snede $E[\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}]$ heeft $3 \times 4 - 2 = 10$ lijnen. Dit is een maximum snede. Immers, laat $F = E[U, V \setminus U]$ een snede zijn. We mogen aannemen dat $|U| \leq |V \setminus U|$. Als $|U| \leq 2$ dan geldt $|F| \leq 4|U| = 8$. Als $|U| = 3$ dan geldt $|F| = 4|U| - E[U] = 12 - 2E[U]$. Omdat er geen onafhankelijke verzameling van grootte 3 is (want C_7 heeft geen driehoeken), vinden we $|F| \leq 10$.

■

Opgave 3

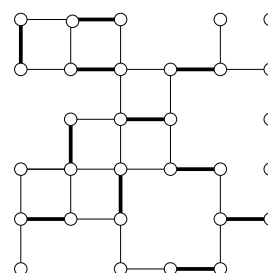
- a) In het plaatje zie je de Petersengraaf met gegeven gewichten op de lijnen. Een van de gewichten is een variabele x .

Vindt een minimum gewicht opspannende boom voor $x = 4$. Bepaal voor elke $x \in \mathbb{R}$ het gewicht van een minimum gewicht opspannende boom. Geef een (korte) argumentatie.



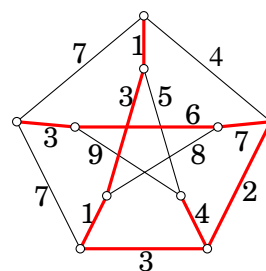
- b) In het plaatje rechts zie je een bipartiete graaf met een matching M (dikgedrukte lijnen).

Vind in deze graaf een matching van maximale grootte. Beargumenteer waarom de gevonden matching maximale grootte heeft.



Oplossing.

- a) Laat e de lijn zijn met gewicht x . We nemen $x = 4$ en voeren het algoritme van Prim uit. In de figuur zie je een van de drie mogelijke oplossingen (de lijn van gewicht 7 kan worden ingeruild voor een van de andere lijnen van gewicht 7). Het totale gewicht is $1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 6 + 7 = 30$.



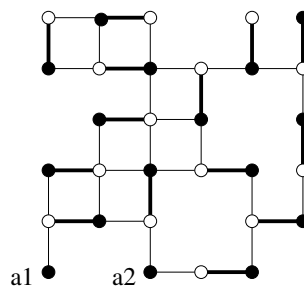
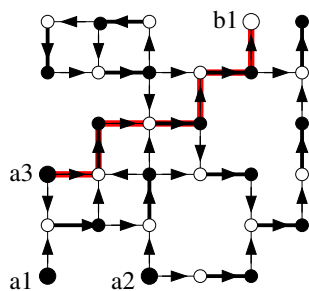
Voor $x > 3$ zien we dat e niet gekozen wordt door het algoritme omdat e een cykel vormt met lijnen van gewicht ≤ 3 . Het totale gewicht is dan dus 30.

Als $x < 3$, dan zal Prim's algoritme als eerste de lijnen van gewicht 1, 1, 2, x kiezen (in de juiste volgorde). Dit geeft een opspannende boom van gewicht $1 + 1 + 2 + x + 3 + 3 + 3 + 4 + 6 + 7 = 27 + x$.

Als $x = 3$, dan vindt Prim's algoritme een opspannende boom van gewicht 30.

- b) We kleuren de punten van de bipartiete graaf met 2 kleuren, zie figuur. Er zijn 3 ongematchte zwarte punten en er is 1 ongematcht wit punt. We richten alle matchinglijnen van wit naar zwart en de andere lijnen van zwart naar wit. Vervolgens vinden we een kortste gericht pad van $\{a_1, a_2, a_3\}$ naar $\{b_1\}$, dit is een M -verbeterend pad P . Zie rechter figuur.

We vinden zo een grotere matching $M' := M \Delta E(P)$, zie linker figuur. De matching M' heeft maximale grootte, want alle witte punten zijn gematcht.



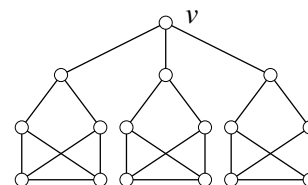
■

Opgave 4

- Geef een 3-reguliere graaf zonder perfecte matching.
- Bewijs dat elke 3-reguliere 2-lijsamenhangende graaf een perfecte matching heeft.

Oplossing.

- Zie de figuur hiernaast. Deze graaf is 3-regulier. Als we v verwijderen ontstaan $3 > 1$ oneven componenten, dus heeft G geen perfecte matching.



- Dit is Corollary 2.2.2 uit Diestel.

Laat $U \subseteq V$ en laat $C_1, \dots, C_k$ de oneven componenten zijn van $G - U$. Wegens de stelling van Tutte is het voldoende te bewijzen dat $G - U$ niet meer dan $|U|$ oneven componenten heeft, oftewel dat $|U| \geq k$. Laat $F_i = E[V(C_i), U]$ de verzameling lijnen zijn die C_i verlaten ($i = 1, \dots, k$). Er geldt

$$|F_i| + 2|E(C_i)| = \sum_{v \in V(C_i)} d(v) = 3|V(C_i)|,$$

dus omdat $|V(C_i)|$ oneven is, heeft ook de snede F_i oneven cardinaliteit. Per aanname is G 2-lijsamenhangend, dus $|F_i| \geq 2$. Er volgt dat $|F_i| \geq 3$ voor $i = 1, \dots, k$.

Het totaal aantal lijnen dat U verlaat is dus $E[U, V \setminus U] \geq 3k$. Omdat elk punt in U graad 3 heeft, moet daarom gelden dat $|U| \geq k$.

■

Opgave 5

Zij G de graaf met als puntenverzameling de 45 intervallen $[i, j]$ met $1 \leq i < j \leq 10$. Twee punten $[i, j]$ en $[i', j']$ vormen een lijn in G als $i \neq i'$ en $j \neq j'$. Bewijs dat G perfect is.

Oplossing. Laat H de bipartiete graaf zijn met $V(H) = \{a_1, \dots, a_{10}\} \cup \{b_1, \dots, b_{10}\}$, waarbij $\{a_i, b_j\}$ een lijn is als $b_j > a_i$. Dan is G het complement van de lijngraaf van H . De lijngraaf van een bipartiete graaf is perfect wegens de stelling van König en het complement van een perfecte graaf is perfect wegens de perfecte graaf stelling van Lovász. De graaf G is dus perfect. ■

Opgave 6

Formuleer en bewijs de sandwich stelling van Lovász.

Oplossing. Dit is Stelling 3.3.2 in de SDP lecture notes. Het bewijs is ook daar te vinden. Een ander bewijs, zoals het bewijs gegeven op college, mag natuurlijk ook. ■