

VOORBEELDTENTAMEN COMBINATORISCHE OPTIMALISERING (WI3612)

26 JUNI, 9.00–12.00 UUR.

Dit is een voorbeeld van een mogelijk tentamen. Schrijf altijd duidelijk je redenering op.

Opgave 1

Zij G een graaf in het vlak waarvan ieder punt graad 5 of graad 6 heeft en waarvan ieder facet (ook het oneindige) een driehoek is. Bewijs dat G precies 12 punten van graad 5 heeft.

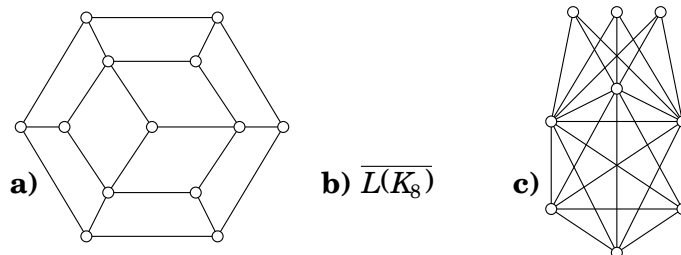
Oplossing. Noem het aantal punten van graad 5 en 6 respectievelijk n_5 en n_6 , noem het aantal lijnen m en het aantal facetten f . Omdat elk facet een driehoek is, volgt dat G samenhangend is, zodat de formule van Euler geldt: $n_5 + n_6 + f = m + 2$. Omdat elk facet incident is met 3 lijnen en elke lijn incident is met 2 facetten, volgt dat $2m = 3f$. Tenslotte geldt dat $5n_5 + 6n_6 = 2m$ (Handshaking lemma). We vinden aldus:

$$\begin{aligned} 6n_5 + 6n_6 + 6f &= 6m + 12 \\ -5n_5 - 6n_6 &= -2m \\ -6f &= -4m. \end{aligned}$$

Optellen van deze vergelijkingen geeft $n_5 = 12$. ■

Opgave 2

Welke van onderstaande drie grafen hebben een Hamiltoncykel? Geef bij elke graaf een kort argument.



Oplossing.

- a) De graaf heeft **geen** Hamiltoncykel. Een bipartiete graaf met een Hamiltoncykel heeft altijd een even aantal punten, maar de gegeven graaf is bipartiet met een oneven aantal punten.
- b) De graaf $G = \overline{L(K_8)}$ heeft **wel** een Hamiltoncykel. De graaf G heeft $(8 \cdot 7)/2 = 28$ punten. Elk punt van $L(K_8)$ heeft graad $6 + 6 = 12$, dus elk punt van G heeft graad $27 - 12 = 15$. Omdat $15 \geq 28/2$ volgt uit de stelling van Dirac dat G een Hamiltoncykel heeft.
- c) De gegeven graaf heeft **geen** Hamiltoncykel. Verwijderen van de middelste drie punten (verticaal gezien) geeft een graaf met $4 > 3$ componenten. ■

Opgave 3

Een taxibedrijf moet vijf passagiers (genummerd 1 t/m 5) vervoeren met vijf taxi's (genaamd A t/m E). Elke taxi vervoert 1 passagier. Voor elke taxi en elke passagier zijn er kosten verbonden aan het vervoeren van die passagier met die taxi (zie tabel). Taxi B kan echter niet passagier 2 vervoeren en taxi D kan niet passagier 3 vervoeren.

Gebruik het Hongaarse algoritme om een toewijzing van de taxi's aan de passagiers te vinden met minimale totale kosten. Geef in je oplossing duidelijk de verschillende stappen aan.

	1	2	3	4	5
A	1	16	6	31	12
B	16	∞	6	7	22
C	6	2	1	5	14
D	4	9	∞	13	11
E	12	20	10	10	12

Oplossing. Na toepassen van rij- en kolom-reducties, vinden we achtereenvolgens

	1	2	3	4	5
A	0	15	5	30	11
B	10		0	1	16
C	5	1	0	4	13
D	0	5		9	7
E	2	10	0	0	2

en

	1	2	3	4	5
A	0	14	5	30	9
B	10		0	1	14
C	5	0	0	4	11
D	0	4		9	5
E	2	9	0	0	0

De eerste drie kolommen en rij 5 bevatten samen alle nullen, dus er is geen toewijzing binnen de nullen (de maximale grootte van een matching is gelijk aan de minimale grootte van een vertex cover en die is niet meer dan 4). Het kleinste getal buiten de aangegeven 4 rijen en kolommen is 1. Dus verminderen buiten deze rijen en kolommen met 1 en verhogen we met 1 op de 3 intersecties van de drie kolommen en de rij. Dit geeft de volgende iteratie (zie onder, links).

Nu zijn de nullen bevat in rij 2,3,5 en kolom 1. Het kleinste getal buiten deze rijen en kolommen is 4. We vinden de volgende iteratie, zie onder, rechts. In de laatste figuur is er een toewijzing die enkel posities met een nul gebruikt, aangegeven in bold (er is ook een tweede oplossing!).

	1	2	3	4	5
A	0	14	5	29	8
B	10		0	0	13
C	5	0	0	3	10
D	0	4		8	4
E	3	10	1	0	0

	1	2	3	4	5
A	0	10	1	25	4
B	14		0	0	13
C	9	0	0	3	10
D	0	0		4	0
E	7	10	1	0	0

Taxi's A t/m E worden dus toegewezen aan passagier 1, 3, 2, 5, 4 (or 1, 4, 3, 2, 5) respectievelijk. De kosten zijn dan $1 + 6 + 2 + 10 + 11 = 1 + 12 + 7 + 1 + 9 = 30$. ■

Opgave 4

Laat $V \subset \mathbb{N}$ een eindige verzameling zijn en laat $d \in \mathbb{N}$. Definieer de graaf G op V door

$$\{u, v\} \in E(G) \iff |u - v| > d \quad (\forall u, v \in V)$$

Bewijs dat G perfect is.

Oplossing. Vanwege de perfecte graaf stelling (van Lovász) is het voldoende te laten zien dat het complement $H := \overline{G}$ perfect is. In H vormen twee verschillende punten u, v een lijn precies dan als $|u - v| \leq d$. We bewijzen dat H chordal is. Laat hiertoe $C = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ een cykel zijn in H van lengte $k \geq 4$. Kies $i \in \{1, \dots, k\}$ zodanig dat u_i maximaal is. Dan geldt:

$$0 \leq u_i - u_{i+1} \leq d, \quad 0 \leq u_i - u_{i-1} \leq d.$$

Hieruit volgt dat $-d \leq u_{i+1} - u_{i-1} \leq d$, dus $\{u_{i-1}, u_{i+1}\}$ is een lijn van H en daarmee een koorde van C . Opmerking: we nemen de indices hier modulo k , dus $u_0 = u_k$ en $u_{k+1} = u_1$. ■

Alternatief. Laat $H = \overline{G}$. Maak bij elke $v \in V$ het interval $I_v := [v - d/2, v + d/2]$. Nu is H de intervalgraaf behorende bij de intervallen $\{I_v \mid v \in V\}$ en is dus perfect. Wegens de perfecte graaf stelling is dus ook G perfect. ■

Alternatief. Definieer de relatie $\succeq$ op V door $u \succeq v \iff u > v + d$ of $u = v$. Ga na dat dit een partiele ordening is. Nu is G de comparability graaf behorende bij deze ordening en is dus perfect. ■

Opgave 5

We willen $\|u - v\|^2 + \|u - w\|^2 + \|v - w\|^2$ maximaliseren, waarbij $u, v, w \in \mathbf{R}^3$ en onder de voorwaarde dat $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = 3$.

- Formuleer dit probleem als een semidefinitief programma.
- Bepaal het duale semidefinitieve programma.
- Los het duale probleem op.

Oplossing.

- a) We drukken eerst alle gegevens uit in termen van inproducten tussen u, v, w . We willen dus

$$\|u - v\|^2 + \|u - w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle) - 2(\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle).$$

maximaliseren onder de voorwaarde dat

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle = 3.$$

Nemen we voor X de Grammatrix van u, v, w dan vinden we het SDP:

$$\max \langle C, X \rangle \quad \text{s.t.} \quad \langle I, X \rangle = 3, \quad X \succeq 0,$$

waarbij

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- b) Het duale programma luidt:

$$\min t \quad \text{s.t.} \quad tI - C \succeq 0.$$

- c) We willen t minimaliseren, zo dat $Y := tI - C = J + (t - 3)I$ positief semidefinitief is. Omdat de eigenwaarden van J gelijk zijn aan $3, 0, 0$ zijn de eigenwaarden van Y gelijk aan $t, t - 3, t - 3$. Er volgt dat $Y \succeq 0$ dan en slechts dan als $t \geq 0$ en $t \geq 3$. Het minimum is dus $t = 3$.

■

Opgave 6

Formuleer en bewijs de stelling van Brooks over het puntkleuren van grafen.

Oplossing. Het bewijs van deze stelling vind je in Diestel, H5.2

■