

Eindtentamen Wiskundige structuren, TW1010
vrijdag 20 januari 2017: 13:30-16:30

Naam:

Cijfer :

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10

1 Definieer een relatie R op $\mathbb{Z}$ door xRy als $xy \geq 0$.

1a Bepaal of R reflexief is.

2

1b Bepaal of R symmetrisch is.

2

1c Bepaal of R transitief is.

2

1d Bepaal of R een equivalentierelatie is.

1

2 Laat $f : A \rightarrow B$ een strikt stijgende functie zijn (dus $f(x) > f(y)$ als $x > y$).

2a Geef de definitie van een injectieve functie.

2

2b Laat zien dat f injectief is.

6

3 Laat S een begrensde (bounded), niet-lege (non-empty), open deelverzameling (subset) van $\mathbb{R}$ zijn.

3a Geef de definitie van een open verzameling.

2

3b Waarom bestaat $\sup(S)$?

2

3c Laat zien dat $\sup(S) \notin S$.

7

4 We definiëren de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ recursief via $a_1 = 0$ en $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{4}{9}$.

4a Laat zien dat $a_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

2

4b Laat met volledige inductie zien dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ van boven begrensd is door 1.

7

[illegible]

4c Laat zien dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ convergeert.

9

4d Bepaal de limiet $\lim a_n$ van de rij.

4

5a Geef de definitie van een open overdekking (open cover) van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$.

2

5b Formuleer de stelling van Heine-Borel.

2

5c Laat zien dat onbegrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ niet compact zijn.

8

A large rectangular box with a thin black border, containing 30 horizontal grey lines for writing. The lines are evenly spaced and extend across the width of the box.

- 6 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks (series) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n}} x^n$ convergeert en voor welke x de reeks divergeert. Bepaal voor de x waarvoor de reeks convergeert of deze convergentie absoluut (absolutely convergent), dan wel relatief (conditionally convergent) is. 11

8 Gegeven de functies $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ voor $x \in [0, 1]$.

8a Laat zien dat voor alle $x \in [0, 1]$ geldt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

4

8b Is deze convergentie uniform?

5
