

Eindtentamen Wiskundige structuren, TW1010
vrijdag 20 januari 2017: 13:30-16:30

Naam:

Cijfer :

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10

1 Definieer een relatie R op $\mathbb{Z}$ door xRy als $xy \geq 0$.

1a Bepaal of R reflexief is.

2

Oplossing. Voor alle $x \in \mathbb{Z}$ is $x^2 \geq 0$, dus geldt xRx . Inderdaad is R reflexief.

☐

1b Bepaal of R symmetrisch is.

2

Oplossing. Stel xRy voor $x, y \in \mathbb{Z}$. Dan is $yx = xy \geq 0$, dus ook yRx geldt. Dus is deze relatie symmetrisch.

☐

1c Bepaal of R transitief is.

2

Oplossing. Er geldt $1R0$, want $1 \cdot 0 = 0 \geq 0$ en $0R(-1)$, want $0 \cdot (-1) = 0 \geq 0$, maar niet $1R(-1)$ want $1 \cdot (-1) = -1 < 0$. Dus is de relatie niet transitief.

☐

1d Bepaal of R een equivalentierelatie is.

1

Oplossing. Nee, want hij is niet transitief.

☐

2 Laat $f : A \rightarrow B$ een strikt stijgende functie zijn (dus $f(x) > f(y)$ als $x > y$).

2a Geef de definitie van een injectieve functie.

2

Oplossing. Een functie $f : A \rightarrow B$ is injectief als voor alle $x, y \in A$ geldt $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

□

2b Laat zien dat f injectief is.

6

Oplossing. Stel $x, y \in A$. We gebruiken contrapositie. Dus neem aan dat $x \neq y$. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat $x > y$. Dan volgt dat $f(x) > f(y)$ en dus is $f(x) \neq f(y)$. Dus $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ is waar, de contrapositie van $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Derhalve is f injectief.

Alternatief: Stel $x, y \in A$. Stel $f(x) = f(y)$. Als $x > y$, dan zou $f(x) > f(y)$, tegenspraak. Net zo, als $x < y$, dan zou $f(x) < f(y)$ tegenspraak. Dus $x = y$ moet gelden. Derhalve is f injectief.

□

3 Laat S een begrensde (bounded), niet-lege (non-empty), open deelverzameling (subset) van $\mathbb{R}$ zijn.

3a Geef de definitie van een open verzameling.

2

Oplossing. Een verzameling $S \subset \mathbb{R}$ is open als $\partial S \subseteq \mathbb{R} \setminus S$.

□

3b Waarom bestaat $\sup(S)$?

2

Oplossing. Omdat S een niet-lege en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is volgt uit het volledighedsaxioma dat S een supremum heeft.

□

3c Laat zien dat $\sup(S) \notin S$.

7

Oplossing. We laten zien dat voor alle $\epsilon > 0$ geldt dat $N(\sup(S); \epsilon) \not\subseteq S$. Zij $\epsilon > 0$. Dan is $\sup(S) + \frac{1}{2}\epsilon > \sup(S)$, dus $\sup(S) + \frac{1}{2}\epsilon \notin S$ (omdat $\sup(S)$ een bovengrens van S is). Maar $\sup(S) + \frac{1}{2}\epsilon \in N(\sup(S); \epsilon)$. Dus $N(\sup(S); \epsilon) \not\subseteq S$. Aangezien dit voor alle $\epsilon > 0$ geldt, en omdat S open is betekent dit dat $\sup(S) \notin S$.

Alternatief: We laten zien dat $\sup(S) \in \partial S$, uit de definitie van open volgt dan dat $\sup(S) \notin S$. Zij $\epsilon > 0$. Dan is $\sup(S) + \frac{1}{2}\epsilon > \sup(S)$ en $\sup(S)$ is een bovengrens voor S , dus $\sup(S) + \frac{1}{2}\epsilon \notin S$. Derhalve is $N(\sup(S); \epsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$. Bovendien is er (wegens definitie supremum) een element in S groter dan $\sup(S) - \frac{1}{2}\epsilon$, en dus is ook $N(\sup(S); \epsilon) \cap S \neq \emptyset$. Derhalve is $\sup(S)$ een randpunt van S .

□

4 We definiëren de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ recursief via $a_1 = 0$ en $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{4}{9}$.

4a Laat zien dat $a_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

2

Oplossing. Merk op dat $a_1 = 0 \geq 0$, en voor $n > 1$ geldt $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}^2 + \frac{4}{9}$ is de som van twee positieve getallen en dus zelf ook positief.

□

4b Laat met volledige inductie zien dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ van boven begrensd is door 1.

7

Oplossing. We gebruiken inductie om te bewijzen dat $a_n \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor $n = 1$ geldt $a_1 = 0 \leq 1$ en is de uitspraak dus waar. Stel er geldt $a_k \leq 1$. Dan is

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k^2 + \frac{4}{9} \leq \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{4}{9} = \frac{17}{18} < 1,$$

dus de uitspraak is dan ook waar voor $n = k + 1$ (hier gebruiken we dat $a_k \geq 0 \geq -1$ om te zien dat $a_k^2 \leq 1$). Wegens inductie is de uitspraak waar voor alle $n \in \mathbb{N}$.

□

4c Laat zien dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ convergeert.

9

Oplossing. We laten eerst zien dat de rij stijgend is. We bewijzen daartoe met inductie $a_{n+1} \geq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor $n = 1$ geldt $a_1 = 0$ en $a_2 = \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} \geq 0$, dus dan klopt het. Stel de uitspraak klopt voor $n = k$, dus $a_{k+1} \geq a_k$. Dan geldt

$$a_{k+2} = \frac{1}{2}a_{k+1}^2 + \frac{4}{9} \geq \frac{1}{2}a_k^2 + \frac{4}{9} = a_{k+1},$$

waar we gebruiken dat $a_k \geq 0$ om de conclusie $a_{k+1}^2 \geq a_k^2$ te kunnen trekken. Dus de uitspraak geldt ook voor $n = k + 1$ en daarom is de rij stijgend.

Wegens de monotoneconvergentiestelling is elke stijgende begrensde rij convergent, en deze rij dus ook.

□

4d Bepaal de limiet $\lim a_n$ van de rij.

4

Oplossing. Zij $a = \lim a_n$. Met de rekenregels van limieten vinden we dan

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \left(\frac{1}{2}a_n^2 + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{2}(\lim a_n)^2 + \frac{4}{9} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{4}{9}.$$

Dus er geldt $a^2 - 2a + \frac{8}{9} = 0$, ofwel $(a - \frac{2}{3})(a - \frac{4}{3}) = 0$, dus $a = \frac{2}{3}$ of $a = \frac{4}{3}$. Aangezien $a_n \leq 1$ voor alle n geldt dat $a = \lim a_n \leq 1$. Derhalve is $a = \frac{2}{3}$.

□

5a Geef de definitie van een open overdekking (open cover) van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2

Oplossing. Een open overdekking $\mathcal{F}$ van S is een collectie open verzamelingen zo dat $S \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. □

5b Formuleer de stelling van Heine-Borel. 2

Oplossing. Een deelverzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is compact dan en slechts dan als S gesloten en begrensd is. □

5c Laat zien dat onbegrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ niet compact zijn. 8

Oplossing. Zij S een onbegrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Schrijf $U_n = (-n, n)$ en beschouw $\mathcal{F} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dan is $\mathcal{F}$ een collectie open verzamelingen, en aangezien $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \mathbb{R}$ is $\mathcal{F}$ een open overdekking van S .

Zij $\mathcal{G}$ een eindige deelverzameling van $\mathcal{F}$. Dus $\mathcal{G} = \{U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_k}\}$ voor zekere indices n_j . Schrijf $m = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Omdat $U_n \subseteq U_m$ als $n \leq m$ geldt dat $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = U_m = (-m, m)$. Aangezien S onbegrensd is, geldt niet $S \subseteq U_m$, dus $\mathcal{G}$ is geen deelovertdekking van $\mathcal{F}$.

Omdat $\mathcal{G}$ willekeurig gekozen was heeft $\mathcal{F}$ dus geen eindige deelovertdekkingen. Derhalve is S niet compact.

Alternatief (via contrapositie): Stel S is compact, we laten zien dat S begrensd is. Neem de $\mathcal{F}$ van boven. Omdat S compact is, is er een eindige deelovertdekking $\mathcal{G}$. Als boven zien we dat $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = U_m$ voor zekere m . Maar dan is $S \subseteq (-m, m)$, en geldt dus $|s| \leq m$ voor alle $s \in S$. Dus S is begrensd. □

- 6 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks (series) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n}} x^n$ convergeert en voor welke x de reeks divergeert. Bepaal voor de x waarvoor de reeks convergeert of deze convergentie absoluut (absolutely convergent), dan wel relatief (conditionally convergent) is. 11

Oplossing. Laat $a_n = \frac{1}{3^n \sqrt{n}}$. We berekenen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \sqrt{n+1}}{3^n \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 3.$$

Derhalve is de convergentiestraal van deze machtreeks 3 en convergeert de reeks absoluut voor $x \in (-3, 3)$. Bovendien divergeert de reeks voor $|x| > 3$.

Als $x = 3$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ een p -reeks met $p = \frac{1}{2}$ en divergeert de reeks dus.

Als $x = -3$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Deze reeks is niet absoluut convergent, omdat de som van de absolute waarden de reeks voor $x = 3$ is. Hij is wel alternerend en de termen in absolute waarde ($\frac{1}{\sqrt{n}}$) dalen naar 0. Dus is de reeks relatief convergent voor $x = -3$.

Conclusie:

- Absoluut convergent voor $-3 < x < 3$
- Relatief convergent voor $x = -3$
- Divergent voor $x < -3$ en voor $x \geq 3$.

□

- 7 Herinner je de definitie van de Cauchy-eigenschap voor reeksen: Een reeks $\sum a_n$ voldoet aan de Cauchy-eigenschap als voor alle $\epsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ is, zo dat voor alle $n \geq m \geq N$ geldt dat

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \epsilon.$$

- 7a Laat (a_n) , (b_n) en (c_n) rijtjes zijn zo dat

- $a_n \leq b_n \leq c_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$
- $\sum a_n$ en $\sum c_n$ voldoen aan de Cauchy-eigenschap.

Laat met behulp van bovenstaande definitie zien dat $\sum b_n$ ook aan de Cauchy eigenschap voldoet. 8

Oplossing. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een N_a zodat voor alle $n \geq m \geq N_a$ geldt dat $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \epsilon$, in het bijzonder is dan dus $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n > -\epsilon$.

Bovendien is er een N_c zodat voor alle $n \geq m \geq N_c$ geldt dat $|c_m + c_{m+1} + \cdots + c_n| < \epsilon$, en in het bijzonder dus $c_m + c_{m+1} + \cdots + c_n < \epsilon$.

Neem nu $N = \max(N_a, N_c)$. Dan geldt voor alle $n \geq m \geq N$ dat

$$-\epsilon < a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n < b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n < c_m + c_{m+1} + \cdots + c_n < \epsilon,$$

dus is $|b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n| < \epsilon$ als gewenst.

Inderdaad voldoet de reeks $\sum b_n$ ook aan de Cauchy eigenschap.

□

- 7b Laat zien dat als $\sum \alpha_n$ en $\sum \gamma_n$ convergente reeksen zijn en $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ voor alle n , dan is $\sum \beta_n$ ook een convergente reeks. 2

Oplossing. Stel $\sum \alpha_n$ en $\sum \gamma_n$ zijn convergente reeksen, met $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ voor alle n . Dan voldoen $\sum \alpha_n$ en $\sum \gamma_n$ aan de Cauchy eigenschap voor reeksen. Maar wegens onderdeel a voldoet $\sum \beta_n$ dan dus ook aan de Cauchy eigenschap voor reeksen. En dus is de reeks $\sum \beta_n$ zelf ook convergent.

□

8 Gegeven de functies $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ voor $x \in [0, 1]$.

8a Laat zien dat voor alle $x \in [0, 1]$ geldt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

4

Oplossing. Voor $x = 1$ geldt $f_n(1) = 0$, dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$.

Voor $0 \leq x < 1$ weten we dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$. Dus geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(1 - x^n) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right] (1 - \left[\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right]) = 0 \cdot (1 - 0) = 0.$$

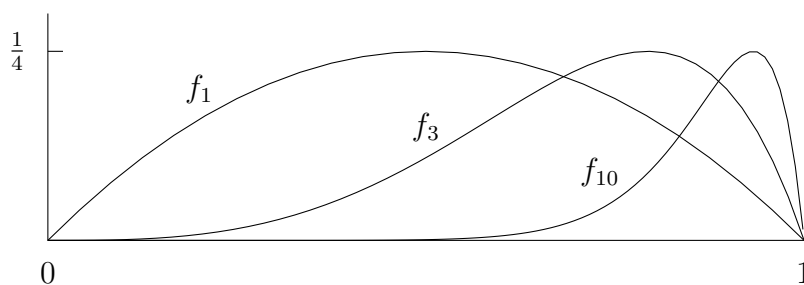
Voor alle x geldt dus dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

□

8b Is deze convergentie uniform?

5

Oplossing. Nee. Kies $\epsilon = \frac{1}{4}$. Zij $N \in \mathbb{N}$ willekeurig. Kies $n = N$ en $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. Dan is $f_n(x) = (\sqrt[n]{\frac{1}{2}})^n (1 - (\sqrt[n]{\frac{1}{2}})^n) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Dus geldt $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{4} \geq \epsilon$. Derhalve is deze convergentie niet uniform.



□