Voorbeeldtentamen IN1305 Fundamentele Informatica I (Uitwerkingen)

Opgave T.1.1 Zij p, q en r propositieletters van een propositioneel logische taal.

(i) Ga met de waarheidstafelmethode na of de formule $(\neg p \to \neg q) \to \neg(p \wedge \neg q)$ al dan niet een tautologie is. Geef ook een tegenmodel mocht dit niet het geval zijn.

(ii) Ga met de waarheidstafelmethode na of de volgende redenering geldig is:

$$p \to q, r \to s \therefore (p \vee r) \to (q \vee s)$$

Mocht deze redenering niet geldig zijn, geef dan ook een tegenmodel.

Uitwerking:

(i) Beschouw de volgende waarheidstabel:

p	q	$(\neg\, p$	$\to$	$\neg\, q)$	$\to$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg\, q)$	
0	0	1 0	1	1 0	1	1	0	0	1 0	
0	1	1 0	0	0 1	1	1	0	0	0 1	
1	0	0 1	1	1 0	0	0	1	1	1 0	$\leftarrow$ tegenmodel
1	1	0 1	1	0 1	1	1	1	0	0 1	

De formule $(\neg p \to \neg q) \to \neg(p \wedge \neg q)$ is geen tautologie. De kolom onder het hoofdconnectief bevat een één nul wel in de derde rij. Uit de waarheidstabel kan één tegenvoorbeeld worden afgelezen, namelijk valuatie v_2 met $v_2(p) = 1$ en $v_2(q) = 0$.[1]

(ii) Beschouw de volgende waarheidstabel:

p	q	r	s	p	$\to$	q	r	$\to$	s		$(p$	$\vee$	$r)$	$\to$	$(q$	$\vee$	$s)$
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	$*$	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	$*$	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0		0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	$*$	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	$*$	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	$*$	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0		0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	$*$	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0		1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1		1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0		1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1		1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	$*$	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	$*$	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0		1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$*$	1	1	1	1	1	1	1

De redenering is geldig aangezien in iedere rij waar alle premissen waar zijn — hier aangegeven met een asterisk — is ook de conclusie waar.

[1] Of, eigenlijk, *iedere* valuatie v met $v(p) = 1$ en $v(q) = 0$ is een tegenmodel.

Opgave T.1.2

(i) Bewijs dat voor alle $A, B \in PROP$: als $\models A$ of $\models B$, dan $\models A \vee B$.

(ii) Laat zien dan *niet* voor alle $A, B \in PROP$: als $\models A \to B$ en $\models B$, dan $\models A$.

Toon dit aan door een tegenvoorbeeld te construeren.

Uitwerking:

(i) Het bewijs van deze stelling kan op tenminste twee manieren worden aangepakt. De eerste is *direct* en houdt in dat er een *gevalsonderscheid* dient te worden gemaakt. De tweede, kortere, manier maakt gebruik van *contrapositie*. Hier worden beide bewijzen geven. Het spreekt voor zich dat bij het tentamen één bewijs volstaat.

Bewijs: Beschouw willekeurige formules A and B in $PROP$. Stel dat $\models A$ of $\models B$. Beide gevallen behandelen we afzonderlijk (*gevalsonderscheid*).

Stel eerst dat $\models A$. Beschouw een willekeurige valuatie w. Met de aanname volgt dan dat $w(A) = 1$. De volgende gelijkheden gelden dan:

$$w(A \vee B) = f_{\vee}(w(A), w(B)) = \max(w(A), w(B)) = \max(1, w(B)) = 1.$$

Met w willekeurig gekozen, volgt het, in dit geval, dat $\models A \vee B$.

Stel vervolgens dat $\models B$. Beschouw wederom een willekeurige valuatie w. Met de aanname volgt dan dat $w(B) = 1$ en de volgende gelijkheden gelden:

$$w(A \vee B) = f_{\vee}(w(A), w(B)) = \max(w(A), w(B)) = \max(w(A), 1) = 1.$$

Met w wederom willekeurig gekozen volgt ook in dit geval dat $\models A \vee B$.

We mogen concluderen dat $\models A \vee B$. $\square$

Bewijs: Beschouw willekeurige formules A and B in $PROP$. Het bewijs is dan met *contrapositie*. Stel dat $\not\models A \vee B$. In dat geval is het *niet* voor alle valuaties v het geval dat $v(A \vee B)$. Oftewel, er is een valuatie w met $w(A \vee B) = 0$. Dan gelden de volgende gelijkheden:

$$0 = w(A \vee B) = f_{\vee}(w(A), w(B)) = \max(w(A), w(B)).$$

Het volgt dat zowel $w(A) = 0$ als $v(B) = 0$. Maar dan dus niet voor alle valuaties v, $v(A) = 1$ noch voor alle valuaties v, $v(B) = 1$. Oftewel, $\not\models A$ en $\not\models B$. $\square$

(ii) Bij deze opgave dient een tegenvoorbeeld geconstrueerd te worden, hetgeen betekent dat er specifieke formules voor A en B gevonden moeten worden zodanig dat zowel $\models A \to B$ als $\models B$ maar $\not\models A$. Oftewel B moet een tautologie zijn maar A juist niet. Het blijkt dat iedere keuze voor A en B die aan deze vereisten voldoet, een tegenvoorbeeld constitueert. Het formuleren van een tegenvoorbeeld kan dan de volgende vorm aannemen.

Laat $A = p$ en $B = p \vee \neg p$. Het is eenvoudig na te gaan dat dan $\not\models p$ en $\models p \vee \neg p$. Bovendien staat $A \to B$ dan voor de formule $p \to (p \vee \neg p)$, welke een tautologie is. Oftewel, $\models p \to (p \vee \neg p)$. De volgende waarheidstabel laat dit zien:

p	p	p	$\vee$	$\neg\ p$	p	$\to$	$(p$	$\vee$	$\neg\ p)$
0	0	0	1	1 0	0	1	0	1	1 0
1	1	1	1	0 1	1	1	1	1	0 1

Deze keuze van p voor A en $p \vee \neg p$ voor B constitueert een geschikt tegenvoorbeeld.

Opgave T.1.3 Bewijs de volgende stellingen in het (niet-uitgebreide) systeem van natuurlijke deductie volgens Fitch (dus *niet* met waarheidstabellen!):

(i) $\vdash (p \to q) \to ((q \to \neg r) \to (r \to \neg p))$

(ii) $\vdash (p \to (q \vee r)) \to (p \to (\neg r \to q))$

Uitwerking: De afleidingen zijn tamelijk lang, maar zijn niet ingewikkeld indien er op een systematische manier gewerkt wordt.

(i)

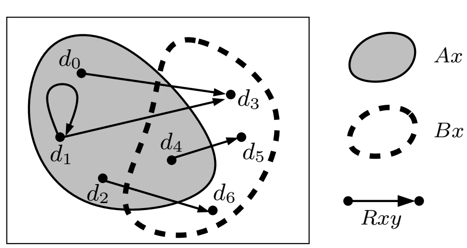
1.	$p \to q$	(hypothese)
2.	$\quad q \to \neg r$	(hypothese)
3.	$\quad\quad r$	(hypothese)
4.	$\quad\quad\quad p$	(hypothese)
5.	$\quad\quad\quad p \to q$	(rei, 1)
6.	$\quad\quad\quad q$	($\to$-elim, 4,5)
7.	$\quad\quad\quad q \to \neg r$	(rei, 2)
8.	$\quad\quad\quad \neg r$	($\to$-elim, 6,7)
9.	$\quad\quad\quad r$	(rei, 3)
10.	$\quad\quad \neg p$	($\neg$-intro, 4,8,9)
11.	$\quad r \to \neg p$	($\to$-intro, 3,10)
12.	$(q \to \neg r) \to (r \to \neg p)$	($\to$-intro, 2,11)
13.	$(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to (r \to \neg p))$	($\to$-intro, 1,12)

(ii)

1.	$p \to (q \vee r)$	(hypothese)
2.	$\quad p$	(hypothese)
3.	$\quad p \to (q \vee r)$	(rei, 1)
4.	$\quad q \vee r$	($\to$-elim, 2,3)
5.	$\quad\quad \neg r$	(hypothese)
6.	$\quad\quad q \vee r$	(rei, 4)
7.	$\quad\quad\quad q$	(hypothese)
8.	$\quad\quad\quad q$	(rei, 7)
9.	$\quad\quad\quad r$	(hypothese)
10.	$\quad\quad\quad\quad \neg q$	(hypothese)
11.	$\quad\quad\quad\quad \neg r$	(rei, 5)
12.	$\quad\quad\quad\quad r$	(rei, 9)
13.	$\quad\quad\quad \neg\neg q$	($\neg$-intro, 10,11,12)
14.	$\quad\quad\quad q$	($\neg$-elim, 13)
15.	$\quad\quad q$	($\vee$-elim, 6,7,8,9,14)
16.	$\quad \neg r \to q$	($\to$-intro, 5,15)
17.	$p \to (\neg r \to q)$	($\to$-intro, 2,16)
18.	$(p \to (q \vee r)) \to (p \to (\neg r \to q))$	($\to$-intro, 1,17)

Opgave T.1.4

(i) Beschouw het onderstaande (informele) model met vier objecten.



Ga na welke van de volgende uitspraken waar zijn in dit model. Motiveer steeds kort het antwoord.

(a) $\forall x\,(Ax \to \exists y\,(By \wedge Rxy))$

(b) $\forall x\,(Bx \to \exists y\,(Ay \wedge Rxy))$

(c) $\exists x \exists y \exists z\,(Rxy \wedge Ryz)$

(d) $\exists x \forall y \exists z\,(Rxy \wedge Ryz)$

(ii) Geef een (informeel) model met tenminste drie objecten (zoals hierboven) waarin de volgende formules alle vijf tegelijk waar zijn:

(a) $\forall x\,(Ax \to \exists y\,(By \wedge Rxy))$

(b) $\exists x\,(Bx \wedge \forall y\,(Ay \to \neg Ryx))$

(c) $\forall x \forall y((Ax \wedge Ay) \to \neg Rxy)$

(d) $\forall x \forall y((Bx \wedge By) \to \neg Rxy)$

(e) $\forall x\,((Ax \wedge Bx) \to Rxx)$

Uitwerking:

(i) Bij deze opgave geven we steeds een informele lezing van de formule plus een argument waarom de formule waar danwel onwaar is.

(a) *Waar.* De formule zegt dat ieder object met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A middels een pijl een object bereikt met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B. Dit is inderdaad waar: d_0, d_1, d_2 en d_4 zijn de enige objecten met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A. Bovendien wijst vanuit d_0 een pijl naar d_3, vanuit d_1 een pijl naar eveneens d_3, vanuit d_2 een pijl naar d_6 en vanuit d_4 een pijl naar d_5. De objecten d_3, d_5 en d_6 hebben alle de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B.

(b) *Onwaar.* Deze formule zegt dat vanuit ieder object met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B een pijl wijst naar tenminste één object met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A. Ieder van de objecten d_3, d_4, d_5 en d_6 maakt deze claim onwaar. Ieder van deze objecten heeft de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B maar vanuit geen van deze objecten vertrekt een pijl naar een object met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A.

(c) *Waar.* Deze formule betekent dat er drie (niet noodzakelijkerwijs verschillende) objecten zijn zodanig dat vanuit de eerste een pijl vertrekt naar de tweede, en vanuit de tweede een pijl naar de derde. Deze formules is waar in het model. Beschouw d_1, d_1 en d_3. Er vertrekt een pijl vanuit d_1 naar zichzelf en eveneens een pijl vanuit d_1 naar d_3. Merk op dat het hier voor de waarheid van de formule van wezenlijk belang is dat de variabelen x en y dezelfde waarde kunnen krijgen, in dit geval het object d_1.

(d) *Onwaar.* Deze formule betekent dat er een object is van waaruit een pijl vertrekt naar ieder object in het model, van waaruit dan weer een pijl vertrekt naar tenminste één object in het model. Om in te zien dat deze formule onwaar is, is het voldoende acht te slaan dat er geen object is van waaruit een pijl vertrekt naar ieder ander object in het model. Zo vertrekt er vanuit d_0, d_1, d_3, d_4, d_5 en d_6 zelf, geen pijl naar d_6 terwijl vanuit d_2 geen pijl vertrekt naar, bijvoorbeeld, d_0. (Een beetje ongelukkige opgave. Excuus.)

(ii) Het informele model moet dusdanig geconstrueerd worden dat:

(a) vanuit ieder object met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A een pijl vertrekt naar tenminste één object met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B;

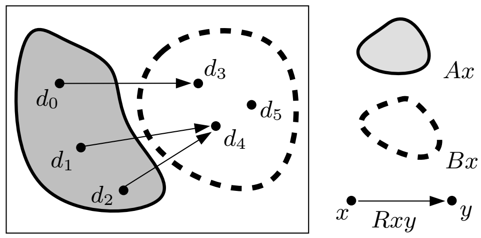
(b) er een object met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B bestaat dat niet bereikt wordt middels een pijl vanuit een object met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A;

(c) geen objecten met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A met elkaar verbonden zijn via een pijl;

(d) geen objecten met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B met elkaar verbonden zijn via een pijl;

(e) alle objecten met zowel de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A als de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B, middels een pijl met zichzelf verbonden zijn.

Merk op dat (c), (d) en (e) tezamen maken dat er in het te construeren model geen objecten kunnen voorkomen met zowel de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A als de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B. In het onderstaande informele model zijn alle vijf de vereisten waar (kleinere modellen zijn heel goed mogelijk):



Opgave T.1.5 Zij A, B, C en D verzamelingen in een universele verzameling U. Bewijs dat (een Venn-diagram alleen volstaat *niet*):

(i) $A \cap (B - C) \ = \ (A \cap B) - C$

(ii) als $\ A \cap B = A \ $ dan $\ A \subseteq B$.

Uitwerking:

(i) *Bewijs:* Beschouw willekeurige verzamelingen A, B en C. Beschouw een eveneens willekeurig object $x \in U$ en de volgende equivalenties:

$$\begin{array}{rll} x \in A \cap (B - C) & \text{desda} & x \in A \text{ en } x \in B - C \\ & \text{desda} & x \in A \text{ en } x \in B \text{ en } x \notin C \\ & \text{desda} & x \in A \cap B \text{ en } x \notin C \\ & \text{desda} & x \in (A \cap B) - C. \end{array}$$

Met x willekeurig gekozen is hiermee de stelling bewezen. □

(ii) Beschouw willekeurige verzamelingen A en B. Stel (1) $A \cap B = A$. We moeten bewijzen dat $A \subseteq B$, oftewel dat voor alle elementen $x \in U$, als $x \in A$ dan ook $x \in B$. Beschouw dus een willekeurig element $x \in U$ en stel (2) $x \in A$. Met aanname (1), dan ook $x \in A \cap B$. Hieruit volgt dat $x \in B$, hetgeen te bewijzen viel. □