

Naam: _____

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

Cijfer :

Toets 1

10

Laat met volledige inductie zien dat voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

- 2 Gegeven twee verzamelingen A en B . Laat zien dat $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Hier is $\mathcal{P}(A)$ de machtsverzameling (powerset) van A . 6

- 3 3a Geef de definitie van een gesloten verzameling (closed set) in $\mathbb{R}$ (zoals gegeven in het boek). 2

- 3b Geef de definitie van een inwendig punt (interior point) van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2

4 4a Geef de definitie voor $\lim s_n = s$.

4b Bepaal de limiet

$$\lim \frac{n^2 + n}{2n^2 + 7}$$

met behulp van de definitie van limieten (dus de stellingen van paragraaf 4.2, de rekenregels, mag je niet gebruiken).

4c Laat zien dat alle convergente rijtjes begrensd (bounded) zijn.

6

5 De axioma's van een geordend lichaam (ordered field) toegepast op $\mathbb{R}$ zijn

$$A1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : x + y \in \mathbb{R} \text{ en } x = w \wedge y = z \Rightarrow x + y = w + z;$$
$$\text{A2 } \forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x;$$
$$\text{A3 } \forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z;$$

A4 $\exists 0 : \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ en deze 0 is uniek;

A5 $\forall x \in \mathbb{R} : \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$ en deze $(-x)$ is uniek;

$$\text{M1 } \forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y \in \mathbb{R} \text{ en } x = w \wedge y = z \Rightarrow x \cdot y = w \cdot z;$$
$$\text{M2 } \forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x;$$
$$\text{M3 } \forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

M4 $\exists 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$ en deze 1 is uniek;

M5 $\forall x \neq 0 : \exists (1/x) \in \mathbb{R} : x \cdot (1/x) = 1$ en deze $(1/x)$ is uniek;

$$\text{DL } \forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$$

O1 Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt precies één van $x = y$, $x > y$, en $x < y$;

$$\text{O2 } \forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z;$$

O3 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow x + z < y + z;$

O4 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz.$

5a Wat is de naam die we geven aan Axioma's A3 en M3?

2

5b Laat nu met behulp van de axioma's zien dat als $a > b$ en $b > 0$, dan $a \cdot a > b \cdot b$. 6
Mocht u het nodig hebben dan mag u zonder bewijs gebruiken dat $x \cdot 0 = 0$ voor alle x .

[illegible]

6 Gegeven een stijgende functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dus $f(x) \geq f(y)$ als $x \geq y$) en een begrensde, niet-lege deelverzameling $C \subseteq \mathbb{R}$.

6a Geef de definitie van het volledig beeld (image) $f(C)$.

2

6b U gaat hieronder in een aantal stappen bewijzen dat $\sup(f(C)) \leq f(\sup(C))$. Bij 6 alle onderstaande punten mag u de voorgaande gebruiken.

6b α $f(C)$ is niet leeg want ...

6b β $f(C)$ is van boven begrensd want ...

6b γ $f(C)$ heeft een supremum want ...
