

Deeltentamen Wiskundige structuren, TW1010
maandag 7 november 2016: 9:00-10:30

Naam:

Cijfer :

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+6)/6

Toets 1

- 1 De Fibonacci getallen worden recursief gedefinieerd als

10

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad (\text{voor alle } n \in \mathbb{N})$$

Laat met volledige inductie zien dat voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

We bewijzen dit met volledige inductie.

Voor $n = 1$ staat er $F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$, dus dan klopt het.

Stel de uitspraak is waar voor $n = k$. Dan is

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_{k+1} &= (F_1 + F_2 + \cdots + F_k) + F_{k+1} \\ &\stackrel{IH}{=} F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \\ &= F_{k+3} - 1 \end{aligned}$$

Dus de uitspraak geldt dan ook voor $n = k + 1$.

Wegens inductie geldt de uitspraak nu voor alle $n \in \mathbb{N}$.

- 2 Gegeven twee verzamelingen A en B . Laat zien dat $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Hier is $\mathcal{P}(A)$ de machtsverzameling (powerset) van A . 6

Stel $A \subseteq B$. Dan geldt voor elke verzameling $C \in \mathcal{P}(A)$ dat $C \subseteq A$. En dus is ook $C \subseteq B$. Daarom is $C \in \mathcal{P}(B)$. We concluderen dat $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Stel nu dat $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Aangezien $A \in \mathcal{P}(A)$ volgt dan dat $A \in \mathcal{P}(B)$, ofwel dat $A \subseteq B$.

Alternatief voor het tweede deel: Stel nu dat $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kies nu een $x \in A$. Dan is $\{x\} \subseteq A$ en dus $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$. Maar dan is dus ook $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$. Dus $\{x\} \subseteq B$ en $x \in B$. Daarom is $A \subseteq B$.

- 3 3a Geef de definitie van een gesloten verzameling (closed set) in $\mathbb{R}$ (zoals gegeven in het boek). 2

De verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is gesloten als $\partial S \subseteq S$.

- 3b Geef de definitie van een inwendig punt (interior point) van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2

$x \in \mathbb{R}$ is een inwendig punt van S als er een $\epsilon > 0$ is zodat $N(x; \epsilon) \subseteq S$.

4 4a Geef de definitie voor $\lim s_n = s$. 2

Er geldt $\lim s_n = s$ als $\forall \epsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |s_n - s| < \epsilon$.

4b Bepaal de limiet 7

$$\lim \frac{n^2 + n}{2n^2 + 7}$$

met behulp van de definitie van limieten (dus de stellingen van paragraaf 4.2, de rekenregels, mag je niet gebruiken).

We laten zien dat $\lim \frac{n^2+n}{2n^2+7} = \frac{1}{2}$.

Zij $\epsilon > 0$. Kies $N = \max(4, \frac{1}{2\epsilon})$. Dan geldt voor alle $n \geq N$ dat

$$\left| \frac{n^2 + n}{2n^2 + 7} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n - 7}{2(2n^2 + 7)} \right| < \frac{2n}{4n^2} \leq \epsilon.$$

Hier gebruiken we dat $2n - 7 > 0$ (want $n \geq 4$), dus $|2n - 7| = 2n - 7 < 2n$ en dat $2(2n^2 + 7) > 4n^2$ in de eerste ongelijkheid. De tweede ongelijkheid volgt omdat $n \geq N \geq \frac{2}{\epsilon}$.

We concluderen dat inderdaad $\lim \frac{n^2+n}{2n^2+7} = \frac{1}{2}$.

4c Laat zien dat alle convergente rijtjes begrensd (bounded) zijn. 6

Dit is stelling 4.1.13 uit het boek.

5 De axioma's van een geordend lichaam (ordered field) toegepast op $\mathbb{R}$ zijn

- A1 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y \in \mathbb{R}$ en $x = w \wedge y = z \Rightarrow x + y = w + z$;
- A2 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$;
- A3 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$;
- A4 $\exists 0 : \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ en deze 0 is uniek;
- A5 $\forall x \in \mathbb{R} : \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$ en deze $(-x)$ is uniek;
- M1 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y \in \mathbb{R}$ en $x = w \wedge y = z \Rightarrow x \cdot y = w \cdot z$;
- M2 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$;
- M3 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
- M4 $\exists 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$ en deze 1 is uniek;
- M5 $\forall x \neq 0 : \exists (1/x) \in \mathbb{R} : x \cdot (1/x) = 1$ en deze $(1/x)$ is uniek;
- DL $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
- O1 Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt precies één van $x = y$, $x > y$, en $x < y$;
- O2 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$;
- O3 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow x + z < y + z$;
- O4 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$.

5a Wat is de naam die we geven aan Axioma's A3 en M3?

2

Associativiteit

5b Laat nu met behulp van de axioma's zien dat als $a > b$ en $b > 0$, dan $a \cdot a > b \cdot b$. 6
Mocht u het nodig hebben dan mag u zonder bewijs gebruiken dat $x \cdot 0 = 0$ voor alle x .

Aangezien $a > b$ en $b > 0$ volgt $a > 0$ uit axioma O2. Aangezien $a > b$ en $a > 0$ volgt $a \cdot a > b \cdot a$ uit axioma O4. Er geldt $b \cdot a = a \cdot b$ wegens axioma M2. Aangezien $a > b$ en $b > 0$ volgt $a \cdot b > b \cdot b$ wegens axioma O4. Combineren we $a \cdot a > b \cdot a$ met $b \cdot a = a \cdot b$ en met $a \cdot b > b \cdot b$ volgt wegens axioma O2 dat $a \cdot a > b \cdot b$.

- 6 Gegeven een stijgende functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dus $f(x) \geq f(y)$ als $x \geq y$) en een begrensde, niet-lege deelverzameling $C \subseteq \mathbb{R}$.

6a Geef de definitie van het volledig beeld (image) $f(C)$.

2

$$f(C) = \{f(c) : c \in C\}$$

Alternatief:

$$f(C) = \{x \in \mathbb{R} : \exists c \in C : x = f(c)\}$$

- 6b U gaat hieronder in een aantal stappen bewijzen dat $\sup(f(C)) \leq f(\sup(C))$. Bij alle onderstaande punten mag u de voorgaande gebruiken.

6b α $f(C)$ is niet leeg want ...

C is niet leeg, dus er is een $c \in C$. Dan is $f(c) \in f(C)$ en dus is $f(C)$ niet leeg.

6b β $f(C)$ is van boven begrensd want ...

C is begrensd, dus er is een M zodat $c \leq M$ voor alle $c \in C$. Omdat f stijgend is volgt dan dat $f(c) \leq f(M)$ voor alle $c \in C$ en is $f(M)$ dus een bovengrens voor $f(C)$.

6b γ $f(C)$ heeft een supremum want ...

De verzameling $f(C)$ is van boven begrensd en niet leeg, dus volgens het volledighedsaxioma heeft deze verzameling een supremum.

6b δ $f(\sup(C))$ is een bovengrens voor $f(C)$ want ...

$\sup(C)$ is een bovengrens voor C , en het argument van 6b β laat dan zien dat $f(\sup(C))$ een bovengrens is van $f(C)$.

6b ϵ Nu geldt $\sup(f(C)) \leq f(\sup(C))$ omdat ...

$f(\sup(C))$ is een bovengrens van $f(C)$, terwijl $\sup(f(C))$ de kleinste bovengrens is.

- 6c Geef een voorbeeld van een stijgende functie f en een verzameling $C \subseteq \mathbb{R}$ waarvoor $\sup(f(C)) < f(\sup(C))$ en dus $\sup(f(C)) \neq f(\sup(C))$. Bewijs dat het voorbeeld voldoet. (Hint: Probeer een niet-continue functie te nemen.)

3

Neem $C = (-1, 0)$ en

$$f(c) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Dan is

$$\sup(C) = 0 \quad f(\sup(C)) = 1 \quad f(C) = \{0\} \quad \sup(f(C)) = 0$$

Dus inderdaad is $\sup(f(C)) = 0 < 1 = f(\sup(C))$.