

ANTWOORDEN TENTAMEN 15-01-2016

1a: Neem als relatie

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (1, 3)\}.$$

Dan geldt xRx voor alle $x \in S$. Dus is R reflexief. Ook geldt xRy dan en slechts dan als yRx . Voor $x = y$ volgt dit uit de reflexiviteit. Verder gelden: $2R1$ en $1R2$, $3R1$ en $1R3$, en dit zijn de enige dus is de relatie symmetrisch. De relatie is niet transitief omdat $2R1$ en $1R3$, maar niet $2R3$.

1b: Laat $f(n) = n - 1$ voor $n \geq 2$ en $f(1) = 8$. Dan is f niet injectief omdat $f(1) = f(9)$, maar $1 \neq 9$. De functie f is wel surjectief, want voor $b \in \mathbb{N}$, geldt $b + 1 \in \mathbb{N}$, en $b + 1 \geq 2$, en dus $f(b + 1) = f(b)$.

1c: Neem aan dat $a|b$ en $a|c$. Er volgt dat er een $x \in \mathbb{Z}$ en $y \in \mathbb{Z}$ zó dat $ax = b$ en $ay = c$. Er volgt $b + c = ax + ay = a(x + y)$ dus $a|b + c$.

1d: Met behulp van $j = n - 2$ vinden we

$$\sum_{n=2}^{\infty} 5^{-n+1} (-3)^{n-2} = \sum_{j=0}^{\infty} 5^{-j-1} (-3)^j = \frac{1}{5} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{5}\right)^j = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - (-\frac{3}{5})} = \frac{1}{5} \frac{5}{8} = \frac{1}{8},$$

waarbij we gebruikten dat $\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r}$ voor $|r| < 1$.

2:

Stap 1: Voor $n = 1$ geldt $\sum_{j=1}^1 \frac{1}{j^2} = 1$, en $2 - \frac{1}{1} = 1$. Aangezien $1 \leq 1$ volgt het gevraagde voor $n = 1$.

Stap 2: Laat $n \in \mathbb{N}$. Neem aan

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad (\text{i.v.})$$

We tonen aan dat

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} \quad (*)$$

Er geldt

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \stackrel{(\text{i.v.})}{\leq} \frac{1}{(n+1)^2} + 2 - \frac{1}{n}.$$

Om $(*)$ te bewijzen voldoet het nu te laten zien dat $\frac{1}{(n+1)^2} + 2 - \frac{1}{n} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^2} + 2 - \frac{1}{n} \leq 2 - \frac{1}{n+1} &\iff \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &\iff \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} \\ &\iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \\ &\iff n+1 \geq n \\ &\iff 1 \geq 0 \end{aligned}$$

en dit laatste is waar, dus elk van de bovenstaande equivalenties geldt. Het gevraagde volgt dus.

Uit stappen 1 en 2 en het principe van volledige inductie volgt nu dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

3 Zie boek.

4a $x \in \mathbb{R}$ is een verdichtingspunt van S als voor elke $\varepsilon > 0$ geldt dat $N^*(x; \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$. Hierbij is $N^*(x; \varepsilon) = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$.

4b Kies $\varepsilon > 0$. Kies met de Archimedische eigenschap $n \in \mathbb{N}$ zodat $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Dan volgt $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Er volgt dan $\frac{1}{n} \in N^*(0; \varepsilon) \cap S$, en dus is deze niet leeg.

4cd Zie boek.

5a Zie boek.

5b Dit gaat net als in het bewijs van de volledigheidstelling uit de handout. We geven de details:

We bewijzen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $m, n \geq N$ geldt dat $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$. Kies $k \geq N$ zó dat $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$. Aangezien $n_k \geq N$ volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

en dit bewijst het gevraagde.

6a Zie boek.

6b We gebruiken het quotiëntenkenmerk voor machtrekken. Laat $a_n = \frac{5^n(n+3)^2}{n!}$ voor $n \geq 1$. Dan geldt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{5^{n+1}(n+4)^2}{(n+1)!} \frac{5^n(n+3)^2}{n!} = 5 \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^2 \frac{1}{n+1} = 5 \left(\frac{1+4/n}{1+3/n} \right)^2 \frac{1}{n+1}.$$

Er volgt uit de rekenregels voor limieten dat:

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left(\frac{1+4/n}{1+3/n} \right)^2 \frac{1}{n+1} = 5 \left(\frac{1}{1} \right)^2 0 = 0.$$

Dus volgt uit het quotiëntenkenmerk voor machtrekken dat de convergentiestraal van de machtrek $R = \infty$. Hieruit zien we dat de reeks (absoluut) convergent is voor alle $x \in \mathbb{C}$.

7a Zie boek

7b Er geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)^3} \leq \frac{1}{8} \frac{1}{n^3}.$$

Neem $M_0 = 1$ en $M_n = \frac{1}{n^3}$ voor $n \geq 1$. Dan volgt uit bovenstaande dat $f_n(x) \leq M_n$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Ook geldt $\sum_{n \geq 0} M_n$ is convergent. Dus de Weierstrass M -test geeft dat $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ uniform convergeert.

7c Definieer de functie $s_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $s_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j$. Aangezien de functies $(s_n)_{n \geq 1}$ alle continu en uniform naar f convergeren, volgt uit een stelling uit het boek dat ook de limietfunctie f weer continu is.