

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
- Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
- Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.

- (5) 1. a. Laat p en q uitspraken zijn. Laat c een uitspraak zijn die niet waar is. Toon met behulp van een waarheidstabel aan dat $p \Rightarrow q$ en $(p \wedge \sim q) \Rightarrow c$ equivalent zijn.
- (3) b. Bewijs of weerleg: Voor alle getallen $x \geq 0$ geldt: als x irrationaal is, dan is $\sqrt{x}$ irrationaal.
- (3) c. Bewijs of weerleg: Voor alle getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt: als x en y irrationaal zijn, dan is xy ook irrationaal.
- (3) d. Bewijs of weerleg: De functie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeven door $f(m, n) = m - n + 1$ is surjectief.
- (3) e. Bewijs of weerleg: De functie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeven door $f(m, n) = mn$ is injectief.

2. Laat $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ de functie zijn gegeven door

$$f(n) = \frac{4n^{20} - 3 + (-1)^n}{(n^2 + 3n)^{10}}.$$

- (3) a. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq 4$.
- (5) b. Toon aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 4$.
Tip: Je mag bekende rekenregels en standaardlimieten gebruiken.
- (5) c. Toon met behulp van de definitie van het supremum aan dat $\sup\{f(n) : n \in \mathbb{N}\} = 4$.
- (2) 3. a. Laat $S \subseteq \mathbb{R}$ een verzameling zijn. Vul de volgende definitie aan: een punt $x \in S$ heet een inwendig punt (interior point) als
- (4) b. Toon aan: S is open $\iff$ elk punt in S is een inwendig punt.
- (2) c. Vul de volgende definitie aan: een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is compact als
- (4) d. Laat $A, B \subseteq \mathbb{R}$ compacte verzamelingen zijn. Toon met behulp van de definitie van compactheid aan dat $A \cup B$ compact is.

Zie ook de volgende bladzijde.

4. Laat $a_1 = 6$ en definiëer $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$ voor $n \in \mathbb{N}$. Het is eenvoudig in te zien dat $a_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- (6) a. Laat met behulp van volledige inductie zien dat $(a_n)_{n \geq 1}$ dalend is.
- (5) b. Toon aan dat $(a_n)_{n \geq 1}$ convergent is, en bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
Tip: Geef duidelijk elk van de tussenstappen aan.
- (2) 5. a. Vul de volgende definitie aan: Een reële rij $(a_n)_{n \geq 1}$ is een *Cauchy rij* als
- (2) b. Formuleer de stelling van Bolzano-Weierstrass voor rijen.
- (5) c. Bewijs de volledigheidstelling: iedere Cauchy-rij is convergent.
- (6) 6. a. Toon met behulp van de definitie van convergentie van een reeks aan dat

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

convergent is en bereken de som.

- (6) b. Onderzoek of de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j+\sqrt{j}}$ convergent en/of absoluut convergent is.
- (2) 7. a. Laat $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voor $n \geq 1$ functies zijn. Vul de volgende definitie aan: We zeggen dat $(f_n)_{n \geq 1}$ uniform naar een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convergeert als
- (6) b. Toon aan dat de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{(2j)!}$ absoluut convergent is voor iedere $x \in \mathbb{R}$.
- Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de functie $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{(2j)!}$ zijn. Definieer $g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $g_j(x) = \frac{x^j}{(2j)!}$ voor $j \geq 1$. Laat
- $$f_n = \sum_{j=1}^n g_j \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$
- (4) c. Bewijs of weerleg: $(f_n)_{n \geq 0}$ is uniform convergent op het interval $[0, 2015]$.
- (4) d. Bewijs of weerleg: $(f_n)_{n \geq 0}$ is uniform convergent op het interval $[2015, \infty)$.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$

EINDE

1a:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	c	$(p \wedge \sim q) \Rightarrow c$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

1b: Dat is waar. Bewijs: We gebruiken contrapositie. Neem aan dat $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ en schrijf $\sqrt{x} = \frac{p}{q}$ met $p, q \in \mathbb{Z}$. Dan volgt dat $x^2 = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q}$.

1c: Dat is niet waar. Neem $x = y = \sqrt{2}$. Dan geldt dat $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, maar $xy = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.

1d: Dat is waar. Bewijs. Kies $x \in \mathbb{Z}$ willekeurig. Er zijn 2 mogelijkheden: $x \geq 1$ of $x < 1$. In het geval $x \geq 1$, neem $m = x$ en $n = 1$. Dan volgt $f(m, n) = x - 1 + 1 = x$. In het geval $x < 1$, neem $m = 2$, en $n = -x + 1$. Dan $n \in \mathbb{Z}$ en $n \geq 1$, dus $n \in \mathbb{N}$. Er volgt $f(m, n) = 2 - (-x + 1) - 1 = 2 + x - 1 - 1 = x$.

1e: Dat is niet waar. Er geldt namelijk $f(3, 4) = 12 = f(4, 3)$. Echter $(3, 4) \neq (4, 3)$.

2a Er geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$, $-3 + (-1)^n \leq 0$ en $(n^2 + 3n)^{10} \geq (n^2)^{10} = n^{20}$ en dit is > 0 . Dus

$$f(n) \leq \frac{4n^{20}}{(n^2 + 3n)^{10}} \leq \frac{4n^{20}}{n^{20}} = 4.$$

2b Merk op dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$f(n) = \frac{4 - \frac{3}{n^{20}} + \frac{(-1)^n}{n^{20}}}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{10}}.$$

Er geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^{20}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^{20}} = 0$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$. Met de rekenregels voor limieten volgt dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{4 + 0}{(1 + 0)^{10}} = 4.$$

2c We weten uit 2a dat 4 een bovengrens is voor $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Bewering 4 is de kleinste bovengrens. Inderdaad, kies $x < 4$ willekeurig. Kies $\varepsilon > 0$ zodat $x < 4 - \varepsilon$. Er volgt uit de definitie van limiet dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor alle $n \geq N$, $|f(n) - 4| < \varepsilon$. Dus voor $n = N$ vinden we $|f(N) - 4| < \varepsilon$. Hieruit volgt $-(f(N) - 4) < \varepsilon$. Dus $f(N) > 4 - \varepsilon > x$. Dus x is geen bovengrens voor $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Dus 4 is de kleinste bovengrens.

3a er een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $N(x, \varepsilon) \subseteq S$.

3b $\Rightarrow$: Neem aan S is open. Kies $x \in S$ willekeurig. We moeten laten zien dat x een inwendig punt is. Aangezien $\text{bdr}(S) \subseteq (\mathbb{R} \setminus S)$ geldt $x \notin \text{bdr}(S)$. Dus geldt niet voor elke $\varepsilon > 0$,

$$N(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \quad \text{en} \quad N(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$$

Dus we kunnen $\varepsilon > 0$ zo kiezen dat

$$N(x, \varepsilon) \cap S = \emptyset \quad \text{of} \quad N(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus S) = \emptyset.$$

Aangezien $x \in N(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$, moet dus wel gelden dat $N(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus S) = \emptyset$. Hieruit volgt $N(x, \varepsilon) \subseteq S$. $\Leftarrow$: Neem aan dat ieder punt in S een inwendig punt is. We moeten laten zien dat $\text{bdr}(S) \subseteq (\mathbb{R} \setminus S)$. Kies $x \in \text{bdr}(S)$. Dan geldt voor elke $\varepsilon > 0$ dat

$$N(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \quad \text{en} \quad N(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset \quad (*).$$

Stel dat $x \notin \mathbb{R} \setminus S$. We leiden een tegenspraak af. Er volgt dat $x \in S$, dus kunnen we wegens de aanname $\varepsilon > 0$ vinden zó dat $N(x, \varepsilon) \subseteq S$. Dus dan ook

$$N(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$$

Dit geeft een tegenspraak met (*). Dus blijkbaar geldt $x \in \mathbb{R} \setminus S$.

EINDE

3c Voor elke open overdekking van S een eindige deelloverdekking bestaat.

3d Kies een open overdekking $\mathcal{F}$ van $A \cup B$. Dan volgt $\mathcal{F}$ een open overdekking is van A . Dus kunnen we een eindige deelloverdekking $\mathcal{G}$ voor A vinden. Net zo geldt dat $\mathcal{F}$ een open overdekking is van B , dus kunnen we een eindige deelloverdekking $\mathcal{H}$ voor B vinden. Er volgt dat $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ een eindige deelloverdekking van $A \cup B$ is.

4a We tonen aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$.

Stap 1. Aangezien $a_2 = \sqrt{18} \leq \sqrt{36} = 6 = a_1$ is de uitspraak waar voor $n = 1$.

Stap 2. Laat $n \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $a_{n+1} \leq a_n$. We tonen aan dat $a_{n+2} \leq a_{n+1}$. Er geldt wegens aanname $12 + a_{n+1} \leq 12 + a_n$. Aangezien de wortel functie stijgend is volgt $\sqrt{12 + a_{n+1}} \leq \sqrt{12 + a_n}$. Dus volgt $a_{n+2} \leq a_{n+1}$.

4b Aangezien $(a_n)_{n \geq 1}$ dalend en naar beneden begrensd is, volgt uit de monotone convergentie stelling dat $(a_n)_{n \geq 1}$ convergent is. Laat $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Uit de rekenregels van limieten volgt dat

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{12 + a_n} = \sqrt{12 + x}.$$

Er volgt $x^2 = 12 + x$. Hieruit volgt $(x - 4)(x + 3) = 0$, en dus $x - 4 = 0$ of $x + 3 = 0$. Dus $x = 4$ of $x = -3$. Aangezien $x \geq 0$ vinden we dat $x = 4$.

5 Zie boek of handout.

6a Laat $s_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$. Er volgt voor elke $n \geq 2$,

$$s_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Er volgt dat $(s_n)_{n \geq 1}$ convergent is en $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Hieruit vinden we dat de reeks convergent is en

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

6b We onderzoeken eerst de absolute convergentie. Dus we onderzoeken de convergentie van $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j+\sqrt{j}}$. Merk op dat $\frac{1}{j+\sqrt{j}} \geq \frac{1}{2j}$. Er geldt $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j}$ divergent is (harmonische reeks), dus volgt uit het majorantenkenmerk dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j+\sqrt{j}}$ ook divergent is. Dus er is geen absolute convergentie.

De reeks is wel convergent. Dit volgt uit het Leibniz kenmerk met $a_j = \frac{1}{j+\sqrt{j}}$. Inderdaad, de reeks is alternerend, de rij $(a_j)_{j \geq 1}$ is dalend, positief en $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$.

7a voor elke $\varepsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor alle $x \in \mathbb{R}$ en voor alle $n \geq N$ geldt dat $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

7b Laat $a_j = \frac{1}{(2j)!}$. Er geldt

$$\alpha = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(2j)!}{(2j+2)!} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{(2j+2)(2j+1)} = 0.$$

Met het quotientenkenmerk voor machtreksen volgt de convergentiestraal gelijk is aan $R = \infty$. Dus volgt dat de reeks voor elke $x \in \mathbb{R}$, absoluut convergent is.

7c Dit is waar. We bewijzen dit met de M -test. Definieer $M_j = \frac{2015^j}{(2j)!}$ voor $j \geq 1$. Er geldt voor elke $x \in [0, 2015]$ dat

$$|g_j(x)| = \frac{|x|^j}{(2j)!} \leq \frac{2015^j}{(2j)!} = M_j.$$

In 7b hebben we al gezien dat $\sum_{j \geq 1} M_j$ convergent is. Nu volgt uit de M -test dat $\sum_{j \geq 1} g_j$ uniform convergent is. Dit bewijst de uniforme convergentie van $(f_n)_{n \geq 1}$.

7d Dit is niet waar. Merk op dat de puntgewijze limiet gelijk is aan f . Merk op dat voor elke $x \geq 0$ geldt dat

$$|f(x) - f_n(x)| = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^j}{(2j)!} \geq \frac{x^{n+1}}{(2n+2)!}.$$

Er volgt dus

$$\sup \left\{ |f(x) - f_n(x)| : x \in [2015, \infty) \right\} \geq \sup \left\{ \frac{x^{n+1}}{(2n+2)!} : x \in [2015, \infty) \right\} = \infty.$$

Hieruit volgt dat $(f_n)_{n \geq 1}$ niet uniform naar f convergeert op $[2015, \infty)$.

EINDE