

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
 - Tip: maak eerst de vragen die je direct ziet. Succes!
-

Herinner $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

1. Laat A en B verzamelingen zijn en laat $f : A \rightarrow B$ een functie zijn.
 - (4) a. Laat $A_1, A_2 \subseteq A$. Bewijs of weerleg: $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$.
 - (7) b. Laat ook C een verzameling zijn en $g : B \rightarrow C$ een functie zijn. Laat $h = g \circ f$ de samenstelling zijn. Bewijs de volgende uitspraak: Als h injectief is en f is surjectief, dan is g injectief. *Tip: Geef ook de definities van f surjectief en g injectief.*
- (8) 2. Definieer de rij $(F_n)_{n \geq 1}$ door $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ en $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ voor $n \in \mathbb{N}$. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

3. Bewijs met behulp van de axioma's van $\mathbb{R}$ (zie achterzijde):
 - (4) a. Voor elke $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geldt $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$.
 - (4) b. Als $a < b$ en $c < d$, dan geldt $a + c < b + d$.
4. Laat $S, T \subseteq \mathbb{R}$ beide niet-lege naar boven begrensde verzameling zijn.
 - (6) a. Neem aan $S \subseteq T$. Toon aan dat $\sup S \leq \sup T$.
 - (2) b. Vul de volgende definitie aan: $x \in \mathbb{R}$ ligt op de rand van S als
- (2) 5. a. Vul de volgende definitie aan: Een rij $(x_n)_{n \geq 1}$ convergeert naar $x \in \mathbb{R}$ als
 - (6) b. Laat $(x_n)_{n \geq 1}$ en $(y_n)_{n \geq 1}$ convergente rijen zijn met $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ en $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Laat met behulp van de definities zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$.
 - (2) c. Geef een voorbeeld van een rij $(x_n)_{n \geq 1}$ en een begrensde rij $(y_n)_{n \geq 1}$ zó dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ maar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$ bestaat niet.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 5}{5}.$$

EINDE

De axioma's voor $\mathbb{R}$ en de optelling $+$ en vermenigvuldiging $\cdot$.

- A1. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y \in \mathbb{R}$ en als $x = w$ en $y = z$ dan geldt $x + y = w + z$.
- A2. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$.
- A3. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A4. Er is een unieke $0 \in \mathbb{R}$ zó dat $x + 0 = x$.
- A5. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is er een uniek getal $-x \in \mathbb{R}$ zó dat $x + (-x) = 0$.
- M1. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y \in \mathbb{R}$ en als $x = w$ en $y = z$ dan geldt $x \cdot y = w \cdot z$.
- M2. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$.
- M3. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- M4. Er is een unieke $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zó dat $x \cdot 1 = x$.
- M5. Voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ is er een uniek getal $x^{-1} \in \mathbb{R}$ zó dat $x \cdot x^{-1} = 1$.
- DL. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Notatie: voor $x \in \mathbb{R}$ schrijven we $x^2 = x \cdot x$.

Gegeven is een relatie $<$, en de relaties $>$, $\leq$ en $\geq$ zijn gedefinieerd op de gebruikelijke manier. De axioma's van de ordening zijn:

- O1. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt precies één van de volgende relaties $x = y$, $x > y$ of $x < y$
- O2. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x < y$ en $y < z$ dan $x < z$
- O3. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x < y$ dan $x + z < y + z$
- O4. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x < y$ en $z > 0$ dan $xz < yz$

EINDE