

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
 - Tip: maak eerst de vragen die je direct ziet. Succes!
-

Herinner $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

1. Laat A en B verzamelingen zijn en laat $f : A \rightarrow B$ een functie zijn.
 - (4) a. Laat $A_1, A_2 \subseteq A$. Bewijs of weerleg: $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$.
 - (7) b. Laat ook C een verzameling zijn en $g : B \rightarrow C$ een functie zijn. Laat $h = g \circ f$ de samenstelling zijn. Bewijs de volgende uitspraak: Als h injectief is en f is surjectief, dan is g injectief. *Tip: Geef ook de definities van f surjectief en g injectief.*
- (8) 2. Definieer de rij $(F_n)_{n \geq 1}$ door $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ en $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ voor $n \in \mathbb{N}$. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

3. Bewijs met behulp van de axioma's van $\mathbb{R}$ (zie achterzijde):
 - (4) a. Voor elke $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geldt $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$.
 - (4) b. Als $a < b$ en $c < d$, dan geldt $a + c < b + d$.
4. Laat $S, T \subseteq \mathbb{R}$ beide niet-lege naar boven begrensde verzameling zijn.
 - (6) a. Neem aan $S \subseteq T$. Toon aan dat $\sup S \leq \sup T$.
 - (2) b. Vul de volgende definitie aan: $x \in \mathbb{R}$ ligt op de rand van S als
- (2) 5. a. Vul de volgende definitie aan: Een rij $(x_n)_{n \geq 1}$ convergeert naar $x \in \mathbb{R}$ als
 - (6) b. Laat $(x_n)_{n \geq 1}$ en $(y_n)_{n \geq 1}$ convergente rijen zijn met $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ en $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Laat met behulp van de definities zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$.
 - (2) c. Geef een voorbeeld van een rij $(x_n)_{n \geq 1}$ en een begrensde rij $(y_n)_{n \geq 1}$ zó dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ maar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$ bestaat niet.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 5}{5}.$$

EINDE

De axioma's voor $\mathbb{R}$ en de optelling $+$ en vermenigvuldiging $\cdot$.

- A1. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y \in \mathbb{R}$ en als $x = w$ en $y = z$ dan geldt $x + y = w + z$.
- A2. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$.
- A3. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A4. Er is een unieke $0 \in \mathbb{R}$ zó dat $x + 0 = x$.
- A5. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is er een uniek getal $-x \in \mathbb{R}$ zó dat $x + (-x) = 0$.
- M1. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y \in \mathbb{R}$ en als $x = w$ en $y = z$ dan geldt $x \cdot y = w \cdot z$.
- M2. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$.
- M3. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- M4. Er is een unieke $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zó dat $x \cdot 1 = x$.
- M5. Voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ is er een uniek getal $x^{-1} \in \mathbb{R}$ zó dat $x \cdot x^{-1} = 1$.
- DL. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Notatie: voor $x \in \mathbb{R}$ schrijven we $x^2 = x \cdot x$.

Gegeven is een relatie $<$, en de relaties $>$, $\leq$ en $\geq$ zijn gedefinieerd op de gebruikelijke manier. De axioma's van de ordening zijn:

- O1. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt precies één van de volgende relaties $x = y$, $x > y$ of $x < y$
- O2. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x < y$ en $y < z$ dan $x < z$
- O3. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x < y$ dan $x + z < y + z$
- O4. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x < y$ en $z > 0$ dan $xz < yz$

EINDE

1a. Dit is niet waar. Tegenvoorbeeld: Laat $A = B = \mathbb{Z}$ en defineer $f(x) = x^2$. Neem $A_1 = \{-1, 2\}$ en $A_2 = \{1, 2\}$. Dan geldt $f(A_1) = \{1, 4\}$ en $f(A_2) = \{1, 4\}$. Er geldt $A_1 \cap A_2 = \{2\}$ en dus $f(A_1 \cap A_2) = \{4\}$. Dus in dit geval geldt niet dat $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$.

1b. We geven 2 uitwerkingen. *Eerste uitwerking:* Neem aan h is injectief en f is surjectief. We laten zien dat g injectief is. Laat $b_1, b_2 \in B$ en neem aan dat $g(b_1) = g(b_2)$. We moeten laten zien dat $b_1 = b_2$. Aangezien f surjectief is kunnen we $a_1, a_2 \in A$ vinden zodat $f(a_1) = b_1$ en $f(a_2) = b_2$. Er volgt dus

$$h(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_1) = g(b_2) = g(f(a_2)) = h(a_2).$$

Aangezien h injectief is volgt hieruit dat $a_1 = a_2$. Maar dan volgt ook $b_1 = f(a_1) = f(a_2) = b_2$.

Tweede uitwerking: (schets) Neem aan h is injectief en f is surjectief. We laten zien dat g injectief is. We laten eerst zien dat f injectief is. Kies $a_1, a_2 \in A$ met $f(a_1) = f(a_2)$. Dan volgt

$$h(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = h(a_2).$$

Dus uit de injectiviteit van h volgt $a_1 = a_2$. We kunnen concluderen dat f bijjectief is. Dus f^{-1} bestaat en is weer injectief. Dus ook $h \circ f^{-1}$ injectief is, maar aangezien $g = h \circ f^{-1}$, volgt het gevraagde.

2. Voor $n = 1$ geldt $\sum_{i=1}^1 F_i^2 = F_1^2 = 1^2 = 1$ en $F_1 F_2 = 1 \cdot 1 = 1$. Dus beide zijn gelijk. Laat $n \in \mathbb{N}$ en neem aan dat

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1} \quad \text{iv}$$

Er volgt uit de inductieveronderstelling en de definitie van $(F_n)_{n \geq 1}$ dat

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^n F_i^2 \stackrel{\text{(iv)}}{=} F_{n+1}^2 + F_n F_{n+1} = F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) \stackrel{\text{def}}{=} F_{n+1} F_{n+2},$$

en dit geeft de gelijkheid voor $n + 1$.

Uit het principe van volledige inductie volgt de gevraagde identiteit voor alle $n \in \mathbb{N}$.

3a. Er geldt

$$(x \cdot y)(y^{-1} \cdot x^{-1}) \stackrel{M3}{=} ((x \cdot y)y^{-1}) \cdot x^{-1} \stackrel{M3}{=} (x \cdot (yy^{-1})) \cdot x^{-1} \stackrel{M5}{=} (x \cdot 1) \cdot x^{-1} \stackrel{M4}{=} x \cdot x^{-1} \stackrel{M5}{=} 1.$$

Dus $y^{-1} \cdot x^{-1}$ is een multiplicatieve inverse van $x \cdot y$. Uit de uniciteit in M5 volgt dat $y^{-1} \cdot x^{-1} = (x \cdot y)^{-1}$.

3b. Neem aan dat $a < b$ en $c < d$. Er geldt wegens O3 dat $a + c < b + c$ (*). Ook geldt wegens O3 dat $c + b < d + b$. Dit laatste kunnen we wegens A2 herschrijven tot $b + c < b + d$ (**). Met O2 kunnen we uit (*) en (**) concluderen dat $a + c < b + d$.

4a. Noem $\alpha = \sup T$. Laat $s \in S$. Dan geldt $s \in T$ en dus $s \leq \alpha$. Aangezien $s \in S$ willekeurig was volgt α is een bovengrens voor S . Aangezien $\sup S$ de kleinste bovengrens is van S volgt dat $\sup S \leq \alpha$.

4b. *antwoord 1:* $x \in \mathbb{R}$ ligt op de rand van S als voor elke $\varepsilon > 0$ geldt dat $N(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ en $N(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$.

antwoord 2: $x \in \mathbb{R}$ ligt op de rand van S als voor elke omgeving N van x dat $N \cap S \neq \emptyset$ en $N \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$.

5a. ... als voor elke $\varepsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor alle $n \geq N$ geldt $|x_n - x| < \varepsilon$.

5b. Merk eerst op dat wegens de driehoeksongelijkheid:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |(x_n - x)| + |(y_n - y)|.$$

Laat $\varepsilon > 0$. Neem N_1 en N_2 in $\mathbb{N}$ zó dat $|x_n - x| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geq N_1$ en $|y_n - y| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geq N_2$. Kies $N = \max\{N_1, N_2\}$. Met de bovenstaande opmerking volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

5c. Neem $x_n = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en laat $y_n = (-1)^n$. Dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ en $-1 \leq y_n \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dus $(y_n)_{n \geq 1}$ is begrensd. Echter $x_n y_n = (-1)^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, en deze rij is niet convergent.

EINDE