

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
- Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
- Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.

- (3) 1. a. Laat A, B en C drie uitspraken zijn. Herinner $\sim A$ betekent $\text{niet}(A)$. Geef de negatie van de volgende uitspraak:

$$\sim A \implies ((\sim B) \vee (\sim C)).$$

Maak hierbij in je eindantwoord alleen gebruik van de symbolen $A, B, C, \implies, \iff, \vee, \wedge$ en eventueel haakjes als nodig.

Bewijs of weerleg elk van de volgende uitspraken:

- (3) b. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt: als $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dan geldt $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ of } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
- (3) c. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt: als $xy \in \mathbb{Q}$ dan geldt $(x \in \mathbb{Q} \text{ of } y \in \mathbb{Q})$

2. Laat A en B niet-lege verzamelingen zijn en $f : A \rightarrow B$ een functie.

- (1) a. Een functie $f : A \rightarrow B$ is injectief als ...
- (1) b. Een functie $f : A \rightarrow B$ is surjectief als ...

Laat $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ gegeven zijn door $f(a, b) = \frac{3b}{a}$. Herinner: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Bewijs of weerleg elk van de volgende uitspraken:

- (3) c. f is injectief.
- (3) d. f is surjectief.

- (5) 3. a. Formuleer en bewijs de driehoeksongelijkheid op $\mathbb{R}$.
- (6) b. Laat $A \subseteq \mathbb{R}$ en $B \subset (0, \infty)$ niet-lege begrensde verzamelingen zijn en definieer

$$K = \inf A \text{ en } L = \sup B \text{ en } V = \left\{ \frac{a}{b} : a \in A \text{ en } b \in B \right\}.$$

Toon met behulp van de definitie van supremum en infimum aan dat $\inf V \geq \frac{K}{L}$.

Zie ook de volgende bladzijde.

- (2) 4. a. Vul de volgende definitie aan: Een reële rij $(a_n)_{n \geq 1}$ is *convergent* als
- (6) b. Laat $(a_n)_{n \geq 1}$ een rij getallen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zijn. Toon aan dat als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
- Laat $a_1 = 1$ en voor alle $n \in \mathbb{N}$ definiëren we $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
- (5) c. Laat met behulp van volledige inductie zien dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $0 \leq a_n \leq 2$.
- (5) d. Laat met behulp van volledige inductie zien dat $(a_n)_{n \geq 1}$ stijgend is.
- (4) e. Toon aan dat $(a_n)_{n \geq 1}$ convergent is, en bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2) 5. a. Laat $S \subseteq \mathbb{R}$. Vul de volgende definitie aan. We zeggen dat $x \in \mathbb{R}$ een verdichtingspunt (accumulation point) is van S als
- (4) b. Laat $S = (1, 2] \cup \{3\}$. Geef aan wat de verdichtingspunten van S zijn en bewijs dit.
- (2) c. Formuleer de Heine-Borel stelling voor verzamelingen $S \subseteq \mathbb{R}$.
- (5) d. Bewijs met behulp van de definities aan dat iedere compacte verzameling S begrensd is.
- (6) 6. a. Formuleer en bewijs het majorantenkenmerk (comparison test) voor reeksen.
- (4) b. Bewijs of weerleg: als een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is, dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.
- (8) c. Bepaal voor welke $x \in \mathbb{C}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n n x^n$ convergent en/of absoluut convergent is.
- (3) 7. a. Laat $S \subset \mathbb{R}$. Gegeven zijn functies $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ voor $n \geq 1$ en $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Vul de volgende definitie aan: We zeggen dat $(f_n)_{n \geq 1}$ uniform naar f convergeert als
- Laat voor elke $n \in \mathbb{N}$, de functie $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f_n(x) = \frac{1}{2+x^n}$.
- (3) b. Bereken de puntgewijze limiet van de rij $(f_n)_{n \geq 1}$
- (3) c. Toon aan dat $(f_n)_{n \geq 1}$ niet uniform convergent is.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE