

HANDOUT: DE E-MACHT ALS REEKS

MARK VERAAR

1a. We spreken af 1 is waar en 0 is niet waar. Er geldt:

p	q	niet(p)	$p \Rightarrow q$	niet(p) $\vee$ q
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

De laatste 2 kolommen zijn gelijk, dus de uitspraken $p \Rightarrow q$

en niet(p) $\vee$ q zijn equivalent.

1b. We weten uit 1a dat niet($p \Rightarrow q$) hetzelfde is als niet(niet(p) $\vee$ q). Dit laatste is weer equivalent¹ met $p \wedge$ niet(q). Ook weten we dat niet(voor alle) is hetzelfde als er bestaat. Analoog voor niet(er bestaat). Er volgt dus dat de negatie van de uitspraak bij 1b is:

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \left[(a + f(b) > 3 \wedge a < 4) \wedge b > 2014. \right]$$

2a. Er geldt voor elke $A \in \mathcal{P}(S)$ dat $A \subseteq A$. Dus $\sim$ is reflexief.

2b. De relatie $\sim$ is niet symmetrisch. Er geldt $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$. Echter $\{1, 2\} \not\subseteq \{1\}$.

2c. De relatie $\sim$ is transitief. Inderdaad. Laat $A, B, C \in \mathcal{P}$ en neem aan dat $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$. Bewering $A \subseteq C$. Inderdaad, als $x \in A$, dan geldt $x \in B$ (wegens $A \subseteq B$). Hieruit volgt weer $x \in C$ (wegens $B \subseteq C$).

3. Zie boek.

4a. Zie boek.

4b We tonen eerst aan dat $1 \in \text{bd}(1, 2]$. Laat $\varepsilon > 0$ willekeurig zijn. Er geldt $N(1, \varepsilon) \cap (1, 2] \neq \emptyset$, omdat $\min\{1\frac{1}{2}, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\}$ in beide verzamelingen ligt. Duidelijk is dat $N(1, \varepsilon) \cap \mathbb{R} \setminus (1, 2] \neq \emptyset$ want 1 ligt in beide verzamelingen. Conclusie $1 \in \text{bd}(1, 2]$.

We tonen nu aan dat $2 \in \text{bd}(1, 2]$. Laat $\varepsilon > 0$ willekeurig zijn. Er geldt $N(2, \varepsilon) \cap \mathbb{R} \setminus (1, 2] \neq \emptyset$, omdat $\max\{1\frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\}$ in beide verzamelingen ligt. Duidelijk is dat $N(2, \varepsilon) \cap (1, 2] \neq \emptyset$ want 2 ligt in beide verzamelingen. Conclusie $2 \in \text{bd}(1, 2]$.

Er² resteert te bewijzen dat $\text{bd}(1, 2] \subseteq \{1, 2\}$. Laat hiervoor $x \in \mathbb{R}$ willekeurig zijn met $x \notin \{1, 2\}$. We zullen laten zien dat $x \notin \text{bd}(1, 2]$. Dat is voldoende wegens contrapositie. Laat eerst $x < 1$. Neem $\varepsilon = (1 - x)/2$. Dan geldt $N(x, \varepsilon) \cap (1, 2] = \emptyset$. Dus $x \notin \text{bd}(1, 2]$. Laat nu $x > 2$. Neem $\varepsilon = (x - 2)/2$. Dan geldt $N(x, \varepsilon) \cap (1, 2] = \emptyset$, dus $x \notin \text{bd}(1, 2]$. Ten slotte het geval $x \in (1, 2]$. Neem $\varepsilon = \min\{x - 1, 2 - x\}/2$. Dan geldt $N(x, \varepsilon) \cap \mathbb{R} \setminus (1, 2] = \emptyset$. Dus $x \notin \text{bd}(1, 2]$.

4c. Zie boek.

4d. Zie boek.

¹Veel gemaakte fout is om de "niet" van de implicatie niet goed uit te rekenen

²Veel gemaakte fout: Dit deel zijn sommige vergeten

5a Zie boek

5b We tonen aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n \geq 1$.

Stap 1. Voor $n = 1$ geldt $a_n = 1 \geq 1$. Dus klopt voor $n = 1$.

Stap 2. Laat $n \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $a_n \geq 1$. Er volgt $1 + a_n \geq 1 > 0$, dus $\frac{1}{1+a_n} > 0$. Dus

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n} \geq 1 + 0 = 1.$$

Uit het principe van volledige inductie volgt voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n \geq 1$.

5c Laat $n \geq 2$. Er volgt uit 5b dat $(1 + a_n)(1 + a_{n-1}) \geq 4$. We vinden dus:

$$|a_{n+1} - a_n| = \left| 1 + \frac{1}{1+a_n} - \left(1 + \frac{1}{1+a_{n-1}} \right) \right| = \frac{|a_{n-1} - a_n|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{4}.$$

Nu volgt uit de stelling dat $(a_n)_{n \geq 1}$ een Cauchy rij is.

5d. Uit de volledighedsstelling en 5c volgt dat $(a_n)_{n \geq 1}$ convergent is. Noem $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Uit de rekenregels en 5b weten we dat $a \geq 1$. Ook volgt uit de rekenregels en $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$ dat

$$a = 1 + \frac{1}{1+a}.$$

Hieruit volgt $a^2 = 2$. Hieruit zien we dat $a = \sqrt{2}$ of $a = -\sqrt{2}$. Aangezien $a \geq 1$ kunnen we concluderen³ dat $a = \sqrt{2}$.

6a. Zie boek.

6b. Dit is niet waar. Neem $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Dan geldt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent (dit volgt uit de alternierende reeksen test). Er geldt echter $a_{2n} = \frac{1}{2n}$ en dus $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Dit is divergent, omdat de harmonische reeks divergeert.

6c Laat $a_n = \frac{1}{2^n n^2}$. Voor de convergentie straal R geldt (wegens quotiëntenkenmerk voor machtrekken)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Er volgt dus $R = 2$. Hieruit vinden we dat de machtreeks absoluut convergent is voor $|x| < 2$, en divergent voor $|x| > 2$.

Als $|x| = 2$, dan geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Dit is een p -reeks met $p = 2 > 1$, en is dus convergent. Er volgt dat ook voor $|x| = 2$ de reeks absoluut convergent is.

We kunnen concluderen dat het gebied waar de reeks absoluut convergent is gelijk is aan $\{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 2\}$. Hier is de reeks ook convergent, omdat absolute convergentie impliceert convergentie.

7a zie boek.

7b zie boek.

7c Er geldt voor alle $x \in [-2014, 2014]$ dat

$$|f_n(x)| = \frac{|x \cos(nx)|}{2^n} \leq \frac{2014}{2^n} = 2014 \cdot (1/2)^n.$$

Aangezien $\sum_{n=1}^{\infty} 2014 \cdot (1/2)^n$ is convergent (meetkundige reeks), volgt uit de Weierstrass M -test dat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergeert.

³Deze opgave laat dus zien dat $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}} = \sqrt{2}$. Dit noemen we een kettingbreuk