

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
- Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
- Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.

- (4) 1. a. Laat p en q uitspraken zijn. Toon met behulp van een waarheidstabel aan dat $p \Rightarrow q$ en $(\sim p) \vee q$ equivalent zijn.
- (6) b. Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn. Vereenvoudig de negatie van de volgende logische uitspraak:

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ zó dat } \left[(a + f(b) > 3 \text{ en } a < 4) \Longrightarrow b \leq 2014 \right].$$

Maak hierbij alleen gebruik van de logische symbolen $\forall, \exists, \Longleftrightarrow, \Longrightarrow, \vee, \wedge$.

2. Laat $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Op de machtsverzameling $\mathcal{P}(S)$ van S definiëren we een relatie door $A \mathbf{R} B$ als $A \subseteq B$. Bewijs of weerleg elk van de volgende uitspraken
- (3) a. De relatie $\mathbf{R}$ is reflexief.
- (3) b. De relatie $\mathbf{R}$ is symmetrisch.
- (3) c. De relatie $\mathbf{R}$ is transitief.
- (10) 3. Formuleer en bewijs de monotone convergentiestelling voor rijen.
- (2) 4. a. Laat $S \subseteq \mathbb{R}$. Vul de volgende definitie aan. We zeggen dat $x \in \text{bd}S$ (dat betekent x ligt op de rand van S) als
- (5) b. Laat zien dat $\text{bd}(1, 2] = \{1, 2\}$.
- (1) c. Vul de volgende definitie aan: een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is compact als
- (4) d. Toon met behulp van de definitie aan: De verzameling $(0, 8)$ is niet compact.

Zie ook de volgende bladzijde.

De volgende stelling zullen we straks gebruiken. Je hoeft deze niet te bewijzen.

Stelling I: Laat $r \in [0, 1)$. Laat $(a_n)_{n \geq 1}$ een rij reële getallen zijn. Als voor elke $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ geldt dat

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|,$$

dan is $(a_n)_{n \geq 1}$ een Cauchy rij.

- (2) 5. a. Vul de volgende definitie aan: Een reële rij $(a_n)_{n \geq 1}$ is een *Cauchy rij* als
- (8) b. Laat $a_1 = 1$ en voor alle $n \in \mathbb{N}$ definiëren we $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$. Toon met behulp van volledige inductie aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n \geq 1$.
- (5) c. Toon met behulp van de bovenstaande Stelling I aan dat $(a_n)_{n \geq 1}$ een Cauchy rij is.
- (5) d. Leid af dat $(a_n)_{n \geq 1}$ convergent is, en bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

6. Laat $(a_n)_{n \geq 1}$ een rij reële getallen zijn.

- (5) a. Bewijs of weerleg: als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (4) b. Bewijs of weerleg: als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ ook convergent.
- (8) c. Bepaal voor welke $x \in \mathbb{C}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$ convergent en/of absoluut convergent is.

- (3) 7. a. Gegeven zijn functies $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ voor $n \geq 1$ en $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Vul de volgende definitie aan: We zeggen dat $(f_n)_{n \geq 1}$ uniform naar f convergeert als
- (3) b. Formuleer de Weierstrass M -test.
- (6) c. Laat voor elke $n \in \mathbb{N}$, de functie $f_n : [-2014, 2014] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f_n(x) = \frac{x \cos(nx)}{2^n}$. Toon aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergeert.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE