

KORTE ANTWOORDEN PROEFTENTAMEN WS

Hieronder antwoorden op een aantal van de tentamen opgaven.

1a: zie boek hoe dat werkt.

1b: Laat $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Neem aan dat $\frac{x}{x-2} < 3$. We laten zien dat $x < 2$ of $x > 3$. Er zijn 2 mogelijkheden $x < 2$ of $x > 2$. In het eerste geval zijn we direct klaar. In het 2e geval $x > 2$ zullen we laten zien dat zelf geldt dat $x > 3$. Omdat $x - 2 > 0$ volgt uit $\frac{x}{x-2} < 3$ dat $x < 3(x-2)$. Hieruit volgt dat $-2x < -6$. En dus $x > 3$.

2a: Neem aan f heeft een rechts-inverse $g : B \rightarrow A$. Kies $b \in B$ willekeurig. Definieer $a = g(b)$. Dan geldt $f(a) = f(g(b)) = b$. Dus er is een $a \in A$ zó dat $f(a) = b$, dus f is surjectief.

2b: Neem aan dat f een links-inverse heeft. Laat $a_1, a_2 \in A$ en neem aan dat $f(a_1) = f(a_2)$. We laten zien dat $a_1 = a_2$. Er geldt $a_1 = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = a_2$. Dus het gevraagde volgt.

2c: Kies een vast element $a_0 \in A$. Definieer $g : B \rightarrow A$ als $g(f(a)) = a$ en $g(b) = a_0$ als $b \notin f[A]$. Dan geldt g is een goedgedefinieerde functie. Inderdaad, als $f(a_1) = f(a_2)$, dan geldt $a_1 = a_2$ wegens de injectiviteit van f . Dus ook $g(f(a_1)) = a_1 = a_2 = g(f(a_2))$. Dat g een links-inverse is van f , volgt direct uit de definitie van g .¹

3: Stap 1: Voor $n = 1$ geldt $1! = 1$ en $(1/e)^1 = 1/e \leq 1$, dus de uitspraak is waar voor $n = 1$.

Stap 2: Laat $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neem aan dat $n! \geq (n/e)^n$. Er volgt dat

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)(n/e)^n \quad (*)$$

Bewering $(n+1)(n/e)^n \geq ((n+1)/e)^{n+1}$. Deze bewering en $(*)$ samen geven $(n+1)! \geq ((n+1)/e)^{n+1}$ en dit zou het inductie bewijs voltooien.

Dus het voldoet de bewering te bewijzen. De bewering is equivalent met $n^n \geq (n+1)^n/e$. Dit laatste is equivalent met $e \geq (1 + \frac{1}{n})^n$. Dit laatste is waar en de bewering volgt.

4a. Dit is waar. Definieer $\alpha = \sup\{f(x) : x \in A\}$ en $\beta = \sup\{g(x) : x \in A\}$. Beide bestaat omdat A niet-leeg is en f begrensd is. Voor elke $x \in A$ geldt $f(x) \leq g(x) \leq \beta$. Dus er volgt β is een bovengrens voor $\{f(x) : x \in A\}$. Conclusie $\alpha \leq \beta$.

4b. Dit is niet waar. Een tegenvoorbeeld. Neem $A = [1, \infty)$ en $f(x) = 0$ en $g(x) = 1/x$. Dan geldt voor alle $x \in A$ dat $f(x) < g(x)$. Maar het is eenvoudig in te zien dat $\inf\{f(x) : x \in A\} = 0 = \inf\{g(x) : x \in A\}$.

5a: Neem aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $z_n \leq 0$. We laten zien dat $z \leq 0$. Stel niet. Dan $z > 0$. Neem $\varepsilon = z/2$. Uit de definitie van convergentie volgt dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $|z_n - z| < \varepsilon$. Kies nu $n \geq N$ vast. Er volgt $-(z_n - z) < z/2$, en dus $z_n > z/2 > 0$. Dit is in tegenspraak met $z_n \leq 0$.

5b: Zie boek.

5c: Probeer dit zelf.

¹Je kunt ook bewijzen dat surjectieve functies f altijd een rechts inverse hebben

6c: Neem aan dat S open is. Laat $s \in S$. We zullen laten zien dat s een inwendig punt is. Stel niet. Dan weten we dat voor alle $\varepsilon > 0$ geldt dat $N(s; \varepsilon) \not\subseteq S$. Dus voor alle $\varepsilon > 0$ geldt $N(s; \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$. Ook geldt $N(s; \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ (omdat s hierin zit). Dus volgt $s \in \text{bd}(S)$. Aangezien S open geldt ook dat $\text{bd}(S) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Er volgt dus dat $s \in \mathbb{R} \setminus S$. Dit is in tegenspraak met $s \in S$.

Neem aan dat ieder punt in S een inwendig punt is. We laten zien dat S open is. Hiervoor moeten we laten zien dat $\text{bd}(S) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Kies $s \in \text{bd}(S)$. We laten zien dat $s \in \mathbb{R} \setminus S$. Stel niet. Dan geldt $s \in S$. Uit de aanname volgt dat er een $\varepsilon > 0$ is zó dat $N(s; \varepsilon) \subseteq S$. Hieruit volgt $N(s; \varepsilon) \cap \mathbb{R} \setminus S = \emptyset$. Dit is in tegenspraak met $s \in \text{bd}(S)$.

7ab: Zie boek

7c: We gebruiken het quotiëntenkenmerk. Noem $a_j = j \left(-\frac{3}{4} \right)^j$. We onderzoeken eerst of de reeks absoluut convergent is. Er geldt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j+1}{j} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Dit is kleiner dan 1. Dus uit het quotiëntenkenmerk volgt dat de reeks absoluut convergent is. De absolute convergentie impliceert dat de reeks ook convergent is.

8a: Zie boek

8b: $\Rightarrow$. Neem aan dat $f_n \xrightarrow{u} f$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. We kunnen $N \in \mathbb{N}$ vinden zó dat voor alle $n \geq N$ en alle $x \in D$ geldt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Hieruit zien we dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$\Leftarrow$. Neem aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$ en alle $x \in D$ geldt dat $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Dit bewijst $f_n \xrightarrow{u} f$.

8c:² Aangezien $e^t \geq 0$ voor alle $t \geq 0$ en $t \mapsto e^t$ is een stijgende functie vinden we

$$\sup_{x \in [-3, 2010]} |e^{x^2/n} - 1| = \sup_{x \in [-3, 2010]} (e^{x^2/n} - 1) = e^{2010^2/n} - 1 = e^{4000000/n} - 1.$$

Uit de continuïteit van de functie $t \mapsto e^t$ volgt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-3, 2010]} |e^{x^2/n} - 1| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2010^2/n} - 1 = e^0 - 1 = 0.$$

Met opgave 7b volgt dat $e^{x^2/n}$ op $[-3, 2010]$ uniform naar 1 convergeert. Uit een stelling uit het dictaat volgt dat we integraal en limiet mogen verwisselen. Dus vinden we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-3}^{2010} e^{x^2/n} dx = \int_{-3}^{2010} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x^2/n} dx = \int_{-3}^{2010} 1 dx = 2013.$$

²Merk op dat de primitieve is niet bekend, dus kunnen we niet gebruiken