

-
- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
 - Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
 - Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.
- (3) 1. a. Laat p en q uitspraken zijn. Toon met behulp van een waarheidstabel aan dat $\sim p \vee \sim q$ en $\sim (p \wedge q)$ equivalent zijn.
- (3) b. Laat $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Bewijs de volgende uitspraak met behulp van rekenregels voor ongelijkheden: Als $\frac{x}{x-2} \leq 3$, dan $x < 2$ of $x \geq 3$.
2. Laat A en B niet-lege verzamelingen zijn en laat $f : A \rightarrow B$ een functie zijn. We noemen een functie $g : B \rightarrow A$ een *rechts-inverse van f* als voor alle $b \in B$ geldt dat $f(g(b)) = b$. We noemen een functie $g : B \rightarrow A$ een *links-inverse van f* als voor alle $a \in A$ geldt dat $g(f(a)) = a$. Toon aan:
- (3) a. als f een rechts-inverse heeft, dan is f surjectief.
- (3) b. als f een links-inverse heeft, dan is f injectief.
- (3) c. als f injectief is, dan heeft f een links-inverse.
- (8) 3. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Hint: De rij $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ is stijgend en convergeert naar het getal e .

4. Zij A een niet-lege verzameling. Laat $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ twee begrensde functies zijn. Bewijs of weerleg elk van de volgende uitspraken:
- (4) a. Als $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in A$ dan geldt $\sup\{f(x) : x \in A\} \leq \sup\{g(x) : x \in A\}$.
- (4) b. Als $f(x) < g(x)$ voor alle $x \in A$ dan geldt $\inf\{f(x) : x \in A\} < \inf\{g(x) : x \in A\}$.

Zie ook de volgende bladzijde.

- (7) 5. a. Gegeven is een convergente reële rij $(z_n)_{n \geq 1}$ en definieer: $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.
 Bewijs de volgende rekenregel met behulp van de definitie van convergentie:
 Als voor alle $n \geq 1$ geldt dat $z_n \leq 0$, dan geldt $z \leq 0$.
- (2) b. Vul de volgende definitie aan: Een reële rij $(x_n)_{n \geq 0}$ is een *Cauchy rij* als
- (2) c. Laat $(x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchy rij zijn en $\alpha \in \mathbb{R}$. Toon met behulp van de definitie aan dat de rij $(\alpha x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchy rij is.

6. Laat $S \subset \mathbb{R}$.

- (1) a. Vul de volgende definities aan: De verzameling S is gesloten als
- (1) b. Vul de volgende definities aan: De verzameling S is open als
- (5) c. Toon met behulp van de definities aan dat S is open dan en slechts dan als ieder punt van S een inwendig punt is.

- (3) 7. a. Laat $(a_j)_{j \geq 1}$ een reële rij zijn en neem aan dat $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ convergent is. Bewijs dat $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$.

- (5) b. Formuleer en bewijs het majorantenkenmerk voor reeksen $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ met $a_j, b_j \geq 0$ voor alle $j \geq 1$.

- (5) c. Onderzoek of de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} j \left(-\frac{3}{4}\right)^j$ convergent en/of absoluut convergent is.

8. Gegeven zijn functies $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ voor $n \geq 1$ en $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- (2) a. Vul de volgende definitie aan: We zeggen dat $(f_n)_{n \geq 0}$ uniform naar f convergeert als
- (4) b. Toon het volgende aan: $(f_n)_{n \geq 1}$ convergeert uniform naar $f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.
- (4) c. Toon aan dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-3}^{2010} e^{\frac{x^2}{n}} dx = 2013.$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{8} + 1.$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE