

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
-

Herinner $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

1. Definieer de functie $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ door

$$f(a) = \begin{cases} a^2, & \text{als } a \leq -1, \\ a + 2, & \text{als } a \geq 0. \end{cases}$$

Bewijs of weerleg ieder van de volgende uitspraken

- (4) a. f is injectief.
(5) b. f is surjectief.

Antwoord:

1(a): Er geldt $f(-2) = 4 = f(2)$ en $-2 \neq 2$, dus f is niet injectief.

1(b): Laat $b \in \mathbb{N}$ willekeurig zijn. In het geval $b = 1$, dan geldt $f(-1) = 1 = b$. In het geval $b \geq 2$, dan geldt $a = b - 2 \geq 0$, en dus $f(a) = a + 2 = b - 2 + 2 = b$. Dit bewijst f is surjectief.

- (8) 2. Bewijs met behulp van volledige inductie: voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\sum_{j=1}^n (2j - 1) = n^2$

Antwoord:

2. Dit is standaard. Fouten worden gemaakt met het volgende. Zorg dat je in stap 2 begint met:

$$\text{Laat } n \in \mathbb{N}. \text{ Neem aan dat } \sum_{j=1}^n (2j - 1) = n^2.$$

Zeg ook waar je dit gebruik in het bewijs.

3. Laat $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs met behulp van de axioma's van $\mathbb{R}$ (zie achterzijde)

- (4) a. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt $(-1) \cdot x = -x$.
(5) b. Als $0 < x < 1$, dan geldt $x^2 < 1$.

Zie ook de volgende bladzijde.

Antwoord:

3a. $x1 + x(-1) = x(1 + (-1))$, en toon ook aan dat $x0 = 0$. Dit mag je zelf verder uitpuzzelen.

3b. Er geldt $x > 0$ en $x < 1$. Dus uit O4 volgt $x \cdot x < 1x$. Dus met M2 en M4 dat $x^2 < x$. Aangezien $x < 1$ en $x^2 < x$, volgt met O2 dat $x^2 < 1$.

- (2) 4. a. Vul de volgende definitie aan: Een rij $(x_n)_{n \geq 1}$ convergeert naar $x \in \mathbb{R}$ als
- (8) b. Laat $(x_n)_{n \geq 1}$ een rij zijn met $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Laat $(y_n)_{n \geq 1}$ een begrensde rij zijn. Toon met behulp van de definitie van convergentie aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

Antwoord:

4a: zie boek.

4b: Aangezien $(y_n)_{n \geq 1}$ begrensd is, kunnen we een $M > 0$ vinden zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $|y_n| \leq M$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $|x_n| < \varepsilon/M$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

- (9) 5. Laat A een niet-lege verzameling zijn. Laat $f : A \rightarrow (0, 10)$ en $g : A \rightarrow (0, 201)$ functies zijn en definieer de functie $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ door $h(x) = f(x)g(x) + 3$. Laat zien dat $h(A)$ naar boven begrensd is en

$$\sup h(A) \leq \alpha\beta + 3.$$

Hierbij is $\alpha = \sup f(A)$ en $\beta = \sup g(A)$.

Antwoord:

5. Merk op dat voor alle $x \in A$ $f(x), g(x) > 0$, dus $\alpha, \beta > 0$. Er geldt voor alle $x \in A$ dat $f(x) \leq \alpha$ en $g(x) \leq \beta$. Hieruit volgt dat voor alle $x \in A$ geldt $h(x) = f(x)g(x) + 3 \leq \alpha\beta + 3$. Hieruit volgt dat $\alpha\beta + 3$ een bovengrens is voor $h(A)$. De definitie van supremum geeft dan dat $\sup h(A) \leq \alpha\beta + 3$.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 5}{5}.$$

EINDE

De axioma's voor $\mathbb{R}$ en de optelling $+$ en vermenigvuldiging $\cdot$.

- A1. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y \in \mathbb{R}$ en als $x = w$ en $y = z$ dan geldt $x + y = w + z$.
- A2. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$.
- A3. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A4. Er is een unieke $0 \in \mathbb{R}$ zó dat $x + 0 = x$.
- A5. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is er een uniek getal $-x \in \mathbb{R}$ zó dat $x + (-x) = 0$.
- M1. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y \in \mathbb{R}$ en als $x = w$ en $y = z$ dan geldt $x \cdot y = w \cdot z$.
- M2. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$.
- M3. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- M4. Er is een unieke $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zó dat $x \cdot 1 = x$.
- M5. Voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ is er een uniek getal $x^{-1} \in \mathbb{R}$ zó dat $x \cdot x^{-1} = 1$.
- DL. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Notatie: voor $x \in \mathbb{R}$ schrijven we $x^2 = x \cdot x$.

Gegeven is een relatie $<$, en de relaties $>$, $\leq$ en $\geq$ zijn gedefinieerd op de gebruikelijke manier. De axioma's van de ordening zijn:

- O1. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt precies één van de volgende relaties $x = y$, $x > y$ of $x < y$
- O2. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x < y$ en $y < z$ dan $x < z$
- O3. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x < y$ dan $x + z < y + z$
- O4. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x < y$ en $z > 0$ dan $xz < yz$

EINDE