

Deeltentamen Lineaire Algebra 1, TW1030
vrijdag 6 november 2015, 09:00-12:00 uur.

Naam:
Studienummer:

Cijfer :

Dit werk bestaat uit twee delen: kort-antwoord-vragen en open vragen. Bij de open vragen dient elk antwoord te worden beargumenteerd. Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops, formulebladen en dergelijke gebruikt worden. Het cijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten 5 op te tellen en vervolgens te delen door 5.

deel kort antwoord vragen

- (2) **K1.** (a) De oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $(1, 3, -2)$, $(2, 5, 0)$ en $(5, 6, 2)$ is
(2) (b) A is een 3×3 matrix met de eigenschap dat $A^2 = -2A$. Geef alle mogelijke waarden voor $\det A$.

- (2) (c) Gegeven zijn de matrices $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2z & 2x & 2y \end{bmatrix}$. Verder is gegeven dat $\det A = -2$. Wat is $\det B$?

- (2) **K2.** Welke van de volgende afbeeldingen zijn lineair en welke niet?
De spiegeling $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in het vlak $3x_1 - x_2 + x_3 = 2$
De afbeelding $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $T_2([x_1, x_2, x_3]^T) = [\pi x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3]^T$
De afbeelding $T_3 : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ met $T_3(A) = A^T A$
De afbeelding $T_4 : D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $T_4(f) = [f(0), f'(1)]^T$

- (2) **K3.** Maak de volgende definitie af: Een *kleinste kwadraten oplossing* van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (met A een $m \times n$ matrix en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) is een vector $\hat{\mathbf{x}}$ waarvoor geldt dat...

$A\hat{\mathbf{x}}$ zo dicht mogelijk bij $\mathbf{b}$ ligt
of
 $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

- (2) **K4.** V is de deelverzameling van $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ die bestaat uit de matrices waarvan de determinant 0 is, dus $V = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$. Ga van de volgende uitspraken over V na of ze juist of onjuist zijn:

V bevat de nulvector van $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

V is gesloten onder optelling.

V is gesloten onder scalaire vermenigvuldiging.

V is geen deelruimte van $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- (2) **K5.** De lineaire afbeelding $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ is gedefinieerd door $T(p)(x) = (1 - x^2)p''(x) - 2xp'(x)$. Bepaal $[T]_{C \leftarrow B}$ voor de bases $B = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$ en $C = (x^2, x, 1)$.

Naam:

Studienummer:

(5)

1. (a) Welke van de volgende matrices zijn wel en welke zijn niet reëel diagonaliseerbaar? Leg uit!
[AANWIJZING: Dit kan met weinig rekenwerk!]

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

A: ew 3(2x) en 1(1x) dus $m_m(1) = 1$

$$\dim E_3 = \dim_{\text{Nul}}(A - 3I) \stackrel{A}{=} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dus $\dim E_3 = 2$ dus $a.m(3) = m_m(3) = 2 \Rightarrow A$ is reëel diagb
 $a.m(1) = m_m(1) = 1$

B: ew 3(2x) en 1(1x) dus $a.m(1) = m_m(1) = 1$

$$m_m(3) = \dim E_3 = \dim \text{Nul}(B - 3I) = 1 \text{ want}$$

$$B - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dus $a.m(3) \neq m_m(3)$, dus B is niet reëel diagb

C: symmetrisch, dus reëel diagb

(3)

(b) Voor welke waarden van k bestaat er een eigenbasis voor $\mathbb{R}^3$ als $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & 1 & k \\ 2 & 1 & k \end{bmatrix}$.

$$\text{ew: } \begin{vmatrix} 2-1 & 1 & k \\ 2 & 1-1 & k \\ 2 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+k-1 & 1 & k \\ 3+k-1 & 0 & k \\ 3+k-1 & 1 & k-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_1}} \begin{vmatrix} 3+k-1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

dus ew $0(2x)$
 $3+k(1x) \quad (k \neq -3)$ of $0(2x) \quad (k = -3)$

$\dim(\text{Nul } A) = 2$ want

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & 1 & k \\ 2 & 1 & k \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ vrije variabelen} \\ \text{ongecht } k \end{array}$$

Conclusie: • als $k = -3$ dan $\dim(\text{Nul } A) = 2 \neq \dim(\text{Col } A) = 3$
 dus dan is er géén eigenbasis

• als $k \neq -3$ dan $\dim(\text{Nul } A) = 2 = \dim(\text{Col } A)$
 en $\dim(\text{Col } A) = 1 = \dim(\text{Nul } A)$
 dus dan is er wél een eigenbasis.

(3)

(c) Diagonaliseer de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ en bepaal daarmee een matrix R zo dat $R^2 = A$. Je mag R schrijven als product van matrices.

$$\text{ew } A: \det \begin{bmatrix} s-5 & 4 \\ 4 & s-5 \end{bmatrix} = (s-5)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ of } 1 = 9$$

$$E_1 = \text{Nul}(A - I): \begin{bmatrix} 4 & 4 & | & 0 \\ 4 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_1 = \text{sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_9 = \text{Nul}(A - 9I): \begin{bmatrix} -4 & 4 & | & 0 \\ 4 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_9 = \text{sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Dus } A = PDP^{-1} \text{ met } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = E^2$$

$$\text{Dus } A = PDP^{-1} = PE^2P^{-1} = PEP^{-1}PEP^{-1}$$

$$\text{Dus } R = PEP^{-1} \text{ werkt } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Naam:

Studienummer:

1. Gegeven zijn de volgende matrix en vectoren:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

(2)

(a) Laat zien dat $\{\underline{p}, \underline{q}\}$ een basis is voor de nulruimte van A .

Merk op: geen vld twee is een veelvoud vld andere, dus $\underline{p}$ en $\underline{q}$ zijn onafh.

Verder: $A\underline{p} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A\underline{q} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dus $\underline{p}, \underline{q} \in \text{Nul } A$

Tenslotte: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

dus $\dim \text{Nul } A = 2 = \# \{\underline{p}, \underline{q}\}$

$\therefore \{\underline{p}, \underline{q}\}$ is een basis voor $\text{Nul } A$

(3)

(b) Bepaal de projectie van $\underline{b}$ op de nulruimte van A .

Eerst orthogonale basis maken (voor $\text{Nul } A$, mbr GS)

$$\underline{v}_1 = \underline{p}$$

$$\underline{v}_2 = \underline{q} - \frac{\underline{q} \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1} \underline{v}_1 = \underline{q} - \frac{12}{6} \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

check: $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$, ok.

Dus $\hat{\underline{b}} = \text{proj}_{\text{Nul } A} \underline{b} = \frac{\underline{b} \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1} \underline{v}_1 + \frac{\underline{b} \cdot \underline{v}_2}{\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2} \underline{v}_2 = \underline{0} + \frac{-6}{6} \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Controle: $\underline{b} - \hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \perp \underline{p}, \underline{q}$ ✓

Eventueel extra ruimte voor antwoord op (b)

(2)

(c) Bepaal de projectie van $\mathbf{b}$ op de rijruimte van A .

(AANWIJZING: Als je het resultaat van (b) gebruikt kan dit met zeer weinig rekenwerk. Als je (b) niet kon, kun je uitleggen hoe (c) moet)

$$\text{Row } A = (\text{Nul } A)^\perp$$

$$\text{Dus } \underline{b} - \hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \in \text{Row } A$$

$$\text{En } \underline{b} - (\underline{b} - \hat{\underline{b}}) = \hat{\underline{b}} \in \text{Nul } A = (\text{Row } A)^\perp, \text{ dus } \underline{b} - (\underline{b} - \hat{\underline{b}}) \perp \text{Row } A$$

$$\therefore \underline{b} - \hat{\underline{b}} = \text{proj}_{\text{Row } A}(\underline{b})$$

Naam:

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

2. Gegeven wordt dat $B = (3x^3 - 2, x^2 + 2, x^3 + x^2 + x)$ een (geordende) basis is voor een deelruimte W van $P(\mathbb{R})$.

(2)

- (a) Bepaal de basis B' voor W als gegeven is dat $C_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Blijkbaar is $[b'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dus $b'_1 = 1(3x^3 - 2) + 1(x^2 + 2) + 1(x^3 + x^2 + x)$
 $= 4x^3 + 2x^2 + x$

$[b'_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ dus $b'_2 = 1(3x^3 - 2) + 0(x^2 + 2) - 2(x^3 + x^2 + x)$
 $= x^3 - 2x^2 - 2x - 2$

$[b'_3]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dus $b'_3 = 0(3x^3 - 2) - 1(x^2 + 2) + 1(x^3 + x^2 + x)$
 $= x^3 + x - 2$

Dus $B' = (4x^3 + 2x^2 + x, x^3 - 2x^2 - 2x - 2, x^3 + x - 2)$

(2)

- (b) Bepaal $[T]_{B \leftarrow B'}$ als van de lineaire afbeelding $T: W \rightarrow W$ gegeven is dat $[T]_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$[T]_{B \leftarrow B'} = [T]_{B \leftarrow B} C_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(3)

(c) Voor het polynoom p uit W geldt $[p]_{B'} = [1, -1, 1]^T$. Bepaal p en $T(p)$. $[p]_{B'}$ bepalen:

Meth 1: Blijkbaar $p = 1\underline{b}_1 - 1\underline{b}_2 + 1\underline{b}_3$

$$= 1(4x^3 + 2x^2 + x) - 1(x^3 - 2x^2 - 2x - 2) + 1(x^3 + x - 2)$$

$$= 4x^3 + 4x^2 + 4x$$

Meth 2: $[p]_{B'} = \underset{B \leftarrow B'}{C} [p]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

dus $p = 4\underline{b}_3 = 4x^3 + 4x^2 + 4x$

 $T(p)$ bepalen:

Meth 1: $[T(p)]_{B'} = \underset{B \leftarrow B'}{[T]} [p]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

dus $T(p) = -4(3x^3 - 2) + 4(x^2 + 2) + 4(x^3 + x^2 + x)$

$$= -12x^3 + 8 + 4x^2 + 8 + 4x^3 + 4x^2 + 4x$$

$$= -8x^3 + 8x^2 + 4x + 16$$

Meth 2: $[T(p)]_{B'} = \underset{B \leftarrow B'}{[T]} [p]_{B'} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dus $T(p) = -4(3x^3 - 2) + 4(x^2 + 2) + 4(x^3 + x^2 + x)$

$$= -12x^3 + 8 + 4x^2 + 8 + 4x^3 + 4x^2 + 4x$$

$$= -8x^3 + 8x^2 + 4x + 16$$

Naam:

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

3. Laat P een $n \times n$ projectiematrix zijn met kolomruimte W ($n \geq 2$). Definieer de matrix A door $A = 2P - I$.

(2)

- (a) Toon aan: als $x \in W$ dan $Ax = x$.

Meth 1: $x \in W$, dus $\exists y$ zo dat $Py = x$
 Dus $Ax = (2P - I)x = (2P - I)Py = 2P^2y - Py = 2Py - Py = Py = x$ (want P projectiematrix dus $P^2 = P$)

Meth 2: P projectiematrix, dus $P =$ matrix vld orth proj op W .
 Dus als $x \in W$ dan $Px = x$.
 Dus $Ax = (2P - I)x = 2Px - x = 2x - x = x$

(2)

- (b) Toon aan: als $x \perp W$ dan $Ax = -x$.

Meth 1: $x \perp W = \text{Col} P$ dus $x \in (\text{Col} P)^\perp = \text{Nul} P^T = \text{Nul} P$ want $P^T = P$
 Dus $Px = 0$, dus $Ax = (2P - I)x = 2Px - x = 2 \cdot 0 - x = -x$

Meth 2: P projectiematrix dus $P =$ matrix vld orth proj op W .
 Dus als $x \perp W$, dan $Px = 0$.
 Dus $Ax = (2P - I)x = 2Px - x = 0 - x = -x$

(2)

- (c) Toon aan: A heeft geen andere eigenwaarden dan 1 en -1 .

Als $W = \mathbb{R}^n$ dan $E_1 = W$ dus $a.m(1) = n$ dus alleen 1 is ew.
 Als $W = \{0\}$ dan is $W^\perp$ eigenruimte bij ew -1 , en $W^\perp = \mathbb{R}^n$ dus nu $a.m(-1) = n$. Dus alleen -1 is ew.
 Stel dus $W = \mathbb{R}^n$ en $W \neq \{0\}$. Dan $W \subseteq E_1$ en $W^\perp \subseteq E_{-1}$.
 dan $\dim W + \dim W^\perp = n$ dus $m.m(1) + m.m(-1) = n$.
 Ook $a.m(1) + a.m(-1) = n$ Omdat $m.m \leq a.m$ volgt dat we n ew gevonden hebben. Meer zijn er niet, dus 1 en -1 zijn de enige

