

Deeltentamen Lineaire Algebra 1, TW1030
 maandag 28 september 2015, 09:00-11:00 uur.

Naam:
 Studienummer:

Cijfer :

Dit werk bestaat uit twee delen: kort-antwoord-vragen en open vragen. Bij de open vragen dient elk antwoord te worden beargumenteerd. Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops, formulebladen en dergelijke gebruikt worden. Het cijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten 4 op te tellen en vervolgens te delen door 4.

deel kort antwoord vragen

1. Gegeven is de matrix A die we alvast geveegd hebben tot een echelonvorm U :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Voor $i = 1, \dots, 5$ is de vector $\mathbf{a}_i$ kolom i van A , dus bijvoorbeeld $\mathbf{a}_2 = [3, 0, 1, 0]^T$. Voor $i = 1, \dots, 5$ is de vector $\mathbf{u}_i$ kolom i van U , dus bijvoorbeeld $\mathbf{u}_3 = [2, 1, 0, 0]^T$.

(1)

(a) $\dim \text{Row } A =$

$\dim \text{Nul } A =$

$\dim \text{Col } A =$

Elke fout: -1/2 pnt

$\dim \text{Nul } A^T =$

(2)

(b) Geef een basis voor $\text{Nul } A$

Byv $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(3)

(c) Is $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$ een basis voor $\text{Col}(A)$?

Want? (dit is geen kort antwoord vraag!)

Ja/☒ Nee

Dan zou byv $\underline{a}_1 \in \text{span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_4)$ en dat is niet zo, want voor elke vector uit dit span geldt dat het vierde kentel nul is.

Andere methode: $\underline{u}_1 \notin \text{Col } A$. Dat vraagt wel weer meer werk!

(3)

(d) Is $\{a_3, a_4, a_5\}$ een basis voor $\text{Col}(A)$?

Ja/Nee

Want? (dit is geen kort antwoord vraag!)

elk argument
1 puntMa: ① Het aantal vectoren (3) is gelijk aan $\dim \text{Col } A$ ② a_3, a_4, a_5 behoren allemaal tot $\text{Col } A$ (het zijn immers kolommen van A)③ Ze zijn onafhankelijk: $[a_3 \ a_4 \ a_5] \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dus de vectorvgl
 $x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5 = 0$
heeft één opl.

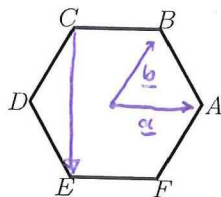
(2)

(e) Geef, zo deze bestaat een 3×5 matrix B zo dat $\text{Nul } A = \text{Row } B$ (vul een matrix in of schrijf "bestaat niet")

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

De 3^e rij is een combinatie
v.d. eerste twee

(2)

2. Beschouw de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met middelpunt O (zie figuur).Druk $\overrightarrow{CE}$ uit in $a = \overrightarrow{OA}$ en $b = \overrightarrow{OB}$.

$$a - 2b$$

(2)

3. Maak de volgende definitie af: Een (eindig) stel vectoren $\{b_1, \dots, b_k\}$ is een *basis* voor de deelruimte W van $\mathbb{R}^n$ als

$$\text{span}\{b_1, \dots, b_k\} = W$$

en $\{b_1, \dots, b_k\}$ onafhankelijk4. Van de lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is gegeven dat

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(2)

(a) Geef, zo deze bestaat, de standaardmatrix van T (vul een matrix in of schrijf "bestaat niet").Kolom 2 ok: 1/2 punt
Kolom 3 ok: 1/2 punt
Kolom 1 ok: 1 punt

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

(b) Doorhalen wat niet van toepassing is: T is

injectief/surjectief/bijectief/inverteerbaar

Naam:

Studienummer:

5. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 \\ -2 & \alpha^2 + 2\alpha & -2 & 5 \end{bmatrix}$ en de vector $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \beta \end{bmatrix}$ waarbij α en β reële getallen zijn.

- (2) (a) Het is bekend dat het stelsel $Ax = b$ geen, één of oneindig veel oplossingen heeft. Zonder te rekenen is echter duidelijk dat één van deze drie mogelijkheden af valt. Welke? Waarom?

A heeft drie rijen, dus hooguit drie pivots

A heeft vier kolommen, dus tenminste één kolom zonder pivot. Er zijn dus twee mogelijkheden: of het stelsel heeft geen opl^{1/2}, of wel, maar dan ∞ veel vanwege een vrije variabele.^{1/2}

Conclusie: "één oplossing" valt af!

- (4) (b) Voor welke waarden van α en β heeft het stelsel $Ax = b$ géén oplossingen?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 & -1 \\ -2 & \alpha^2 + 2\alpha & -2 & 5 & \beta \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{I_2 + I_1 \\ I_3 + 2I_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2 + 2\alpha & 0 & 7 & \beta + 4 \end{array} \right] \xrightarrow{-(\alpha+2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\alpha & \beta - \alpha + 2 \end{array} \right]$$

$\alpha \neq 0, \alpha \neq 5 \rightarrow$ geen nulrij^{1/2} en een vrije variabele $\rightarrow \infty$ veel opl¹

$\alpha = 0$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \beta + 2 \end{array} \right] \xrightarrow{-5} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 3 \end{array} \right]$ ^{1/2}

$\beta = 3$: ∞ veel opl¹

$\beta \neq 3$: geen opl¹

$\alpha = 5$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 3 \end{array} \right]$ $\beta = 3$: ∞ veel opl¹

$\beta \neq 3$: geen opl¹

Conclusie: geen opl als $(\alpha = 0 \text{ en } \beta \neq 3)$ of $(\alpha = 5 \text{ en } \beta \neq 3)$

Eventueel extra ruimte voor antwoord op (b)

NVT

- (2) (c) Los het stelsel $Ax = b$ op voor $\alpha = 0$ en $\beta = 3$.

We hebben bij (b) al geveegd tot

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (1)$$

dus $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2, x_3 \text{ vrij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$

dus $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_2 = 0$: nul meer dan $\frac{1}{2}$ pnt voor de opgave.

- (2) (d) Voor welke waarden van α spannen de kolommen van A heel $\mathbb{R}^3$ op?

Meth 1: Dat gebeurt als A na vegen geen nulrij heeft
dus als $\alpha \neq 0, \alpha \neq 5$

Meth 2: Vegg $\left[A \mid \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right]$ en zorg ervoor dat dit voor alle b_1, b_2, b_3 tenminste één opl heeft

Meth 3: Dat gebeurt als $\dim \text{Col}(A) = 3$, dus als A na vegen drie pivots heeft. Dus $\alpha \neq 0, \alpha \neq 5$

Naam:

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

- (3) 6. (a) Gegeven zijn vectoren $v_1, \dots, v_k$ in $\mathbb{R}^n$ en een inverteerbare $n \times n$ -matrix A . Toon aan dat het volgende dan geldt: als $\{v_1, \dots, v_k\}$ onafhankelijk is, dan is $\{Av_1, \dots, Av_k\}$ ook onafhankelijk.

Meth 1: Beschouw de vectorvgl ①

$$x_1 Av_1 + x_2 Av_2 + \dots + x_k Av_k = 0$$

Dus $A(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k) = 0$

Verm met A^{-1} : ① $A^{-1}A(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k) = A^{-1}0$

Dus $x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = 0$

Omdat $\{v_1, \dots, v_k\}$ onafh is volgt dat dit maar eén op ① heeft: $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$. Dus $\{Av_1, \dots, Av_k\}$ is onafh.

Meth 2: stel $\{Av_1, \dots, Av_k\}$ is afh.

Dan is er tenminste één een lin comb v/d anderen ①

zeg Av_1 , dus $Av_1 = c_2 Av_2 + \dots + c_k Av_k$

Dus $Av_1 = A(c_2 v_2 + \dots + c_k v_k)$

Verm met A^{-1} ① levert $v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$.

Dus $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ afh ①

- (2) (b) Bewijs of weerleg: Als voor matrices $A \neq 0$, B en C geldt dat $AB = AC$, dan $B = C$.

Niet waar, vele voorbeelden mogelijke

(2)

(c) Bewijs of weerleg: De deelverzameling W van $\mathbb{R}^4$, die bestaat uit de vectoren waarvan tenminste één kental nul is, is een deelruimte van $\mathbb{R}^4$.

Niet waar:

byv $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ en $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$

Maar $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$

Dus W is niet gesloten onder optelling