

Tentamen lineaire algebra 1, TW1030
vrijdag 7 november 2014, 9.00-12.00 uur.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops, formulebladen en dergelijke gebruikt worden.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten 5 op te tellen en vervolgens te delen door 5.

1. Gegeven zijn de volgende matrix en vector:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2a \\ 1 & a & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Hierbij zijn a en b reële getallen.

- (3) (a) Geef alle waarden van a en b waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geen oplossingen heeft.
- (2) (b) Voor welke waarden van a spannen de kolommen heel $\mathbb{R}^3$ op?
- (2) (c) Bepaal alle oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voor het geval dat $a = -2$ en $b = 3$.

2. Gegeven zijn de volgende matrix A en een bijbehorende echelonvorm U :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

De getransponeerden van de rijen van A noteren we met $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4$ en die van U met $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4$, dus bijvoorbeeld $\mathbf{a}_2 = (1, 4, 3, 4, 3)^T$ en $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 1, 1)^T$. Welke van de volgende uitspraken is correct en welke niet? Leg uit!!

- (1) (a) $\text{Row } A = \mathbb{R}^3$.
 - (2) (b) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ is een basis voor $\text{Row } A$.
 - (2) (c) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ is een basis voor $\text{Row } A$.
3. (a) Gegeven zijn matrices C en D zo dat $CDC = I_n$. Laat zien dat D vierkant is. Is D inverteerbaar?
- (2) (b) W is de deelverzameling van $\mathbb{R}^\infty$ die bestaat uit de rijtjes waarin oneindig veel kentallen gelijk zijn aan nul. Is W een deelruimte van $\mathbb{R}^\infty$.
- (2) (c) Laat $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ een vaste vector in $\mathbb{R}^3$ zijn en definieer de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ door $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Is T injectief?

4. Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ en de matrix $A = PDP^{-1}$ waarbij

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Beantwoord de volgende vragen zonder P^{-1} en A uit te rekenen! Geef argumenten!

- (2) (a) Is $\mathbf{v}$ een eigenvector van A ? En $\mathbf{w}$?
- (2) (b) Waarom is A symmetrisch?
- (2) (c) Is A een projectiematrix?
- (2) (d) Bereken $A^{481}\mathbf{x}$ als $\mathbf{x} = (3, 1, -1)^T$.

5. Laat W de nulruimte zijn van de matrix A uit opgave 2. Verder zijn de volgende vectoren gegeven:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (2) (a) Laat zien dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ een basis voor W is. Doe dit zonder veegproces!!
- (3) (b) Bepaal de orthogonale projectie $\mathbf{p}$ van $\mathbf{b}$ op W en bepaal de afstand van $\mathbf{b}$ tot W .
- (2) (c) Leg uit hoe de matrix van de orthogonale projectie op W gevonden kan worden. Je hoeft deze matrix dus niet te berekenen!
- (1) (d) Wat is de dimensie van $W^\perp$?

6. Gegeven wordt dat $B = \{x^3 - 2, x^3 - 4x, x^3 + x^2\}$ een basis is voor een deelruimte W van $P(\mathbb{R})$.

- (2) (a) Bepaal de basis B' voor W als gegeven is dat ${}_{B \leftarrow B'} C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- (2) (b) Bepaal ${}_{B \leftarrow B'} [T]$ als van de lineaire afbeelding $T : W \rightarrow W$ gegeven is dat ${}_{B \leftarrow B} [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- (3) (c) Voor het polynoom p uit W geldt $[p]_{B'} = (1, -1, 1)^T$. Bepaal p en $T(p)$.

7. Gegeven is dat A een vierkante matrix is.

- (2) (a) Toon aan: Als $\text{Col } A \subset \text{Nul } A$ dan $A^2 = 0$.
- (2) (b) Toon aan dat het omgekeerde ook waar is, dus: als $A^2 = 0$ dan $\text{Col } A \subset \text{Nul } A$.