

Uitwerking Tentamen lineaire algebra 1, TW1030, vrijdag 7 november 2014.

1. (a) Ga na dat

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2a & 1 \\ 1 & a & 4 & b \\ 1 & a & a^2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2a & 1 \\ 0 & a+4 & 2a+4 & b+1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & -b+3 \end{array} \right].$$

Onderscheid nu de gevallen $a = -4$, $a = -2$, $a = 2$ en de overige mogelijkheden. Invullen van $a = -4$ levert

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & b+1 \\ 0 & 0 & 12 & -b+3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2b+6 \end{array} \right].$$

Als $b \neq -3$ dan volgt uit de derde vergelijking dat het stelsel geen oplossingen heeft. Als $b = -3$ is er geen valse vergelijking en wel een vrije variabele, zodat het stelsel dan oneindig veel oplossingen heeft.

Invullen van $a = 2$ levert de echelonvorm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -b+3 \end{array} \right]$$

en dit heeft geen oplossingen als $b \neq 3$ (valse vergelijking) en oneindig veel oplossingen als $b = 3$ (geen valse vergelijking en een vrije variabele).

Invullen van $a = -2$ levert de echelonvorm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -b+3 \end{array} \right]$$

en dit heeft geen oplossingen als $b \neq 3$ (valse vergelijking) en oneindig veel oplossingen als $b = 3$ (geen valse vergelijking en een vrije variabele).

Voor alle andere a is de eerst gevonden matrix een echelonvorm die geen vrije variabelen heeft (in elke kolom een pivot) en geen valse vergelijking (in elke rij een pivot), zodat het stelsel in die situatie altijd precies één oplossing heeft.

Conclusie: geen oplossingen als $a = -4$ en $b = -3$, of als $a = \pm 2$ en $b \neq 3$.

- (b) Er zijn diverse redeneringen mogelijk. De handigste vind ik: de kolommen spannen $\mathbb{R}^3$ als de kolomruimte dimensie drie heeft en dat is zo als er drie pivots zijn. Dat gebeurt als $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 2\}$.

- (c) Uit (a) blijkt dat voor $a = -2$ en $b = 3$ geldt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

zodat x_3 vrij is, $x_1 = 7 - 4x_3$ en $x_2 = 2$. Dus

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Row A is een deelruimte van $\mathbb{R}^5$ en dus een deelverzameling van $\mathbb{R}^5$. $\mathbb{R}^3$ is geen deelverzameling van $\mathbb{R}^5$ en dus is Row A niet gelijk aan $\mathbb{R}^3$.
- (b) Volgens de theorie vormen de niet-nulrijen van een bij A behorende echelonvorm een basis voor Row A . Omdat $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ en $\mathbf{u}_3$ daaraan voldoen, vormen ze een basis voor Row A .
- (c) Omdat $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ is $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ afhankelijk en dus geen basis voor Row A .
3. (a) Als C een $p \times q$ matrix is, dan is CDC alleen gedefinieerd als D een $q \times p$ matrix is en is CDC een $p \times q$ matrix. Anderzijds volgt uit het gegeven dat CDC een $n \times n$ matrix is. Blijkbaar is $p = q = n$, zodat C en D vierkant zijn. Omdat de matrices vierkant zijn, kunnen determinanten genomen worden en er volgt

$$1 = \det(I_n) = \det(CDC) = \det(C) \det(D) \det(C) = \det(D) \det(C)^2.$$

De determinant van D is dus ongelijk aan nul, zodat D inverteerbaar is.

- (b) Neem bijvoorbeeld de vectoren $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ en $\mathbf{y} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. Deze behoren allebei tot W maar $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ niet. Conclusie: W is niet gesloten onder optelling en dus geen deelruimte van $\mathbb{R}^\infty$.
- (c) Nee, want voor de oneindig vele vectoren $\mathbf{x}$ uit $\text{Span}\{\mathbf{a}\}$ geldt dat $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Immers: de lengte van $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{x}$. Als $\mathbf{x}$ in $\text{Span}\{\mathbf{a}\}$ genomen wordt dan liggen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{x}$ op één lijn en is de oppervlakte van het parallellogram 0. Er zijn dus vele originelen die op $\mathbf{0}$ worden afgebeeld. (Je kunt ook zeggen dat bijvoorbeeld $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.)
4. (a) Er is een diagonalisering van A gegeven en dus staan de eigenwaarden van A op de diagonaal van D . De eigenwaarden zijn dus 0 ($1 \times$) en -1 ($2 \times$). Uit de kolommen van P zijn bases voor de eigenruimten af te lezen. Een basis voor de eigenruimte E_0 bij eigenwaarde 0 is $\{(1, 1, 1)^T\}$ en een basis voor de eigenruimte E_{-1} bij eigenwaarde -1 is $\{(1, 2, -3)^T, (1, -2, 1)^T\}$. Merk op dat $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(1, 2, -3)^T + \frac{1}{2}(1, -2, 1)^T \in E_{-1}$. Dus $\mathbf{w}$ is een eigenvector van A bij ew -1 . $\mathbf{v}$ behoort duidelijk niet tot E_0 . Ook zijn er geen scalaren c_1 en c_2 zo dat $\mathbf{v} = c_1(1, 2, -3)^T + c_2(1, -2, 1)^T$, dus $\mathbf{v}$ is ook geen eigenvector bij ew -1 .
- (b) Elke orthogonaal diagonaliseerbare matrix is symmetrisch en A is orthogonaal diagonaliseerbaar. De eigenruimte bij eigenwaarde 0 is namelijk $\text{Span}\{(1, 1, 1)^T\}$ de eigenruimte bij eigenwaarde -1 is $\text{Span}\{(1, 2, -3)^T, (1, -2, 1)^T\}$ en $(1, 1, 1)^T$ staat loodrecht op $(1, 2, -3)^T$ en $(1, -2, 1)^T$. Het antwoord op de vraag is dus "ja".
- (c) Voor een projectiematrix A moet gelden dat $A^2 = A$. Merk op dat

$$A^2 = PD^2P^{-1} = P(D')P^{-1}$$

met

$$D' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De ew van A^2 zijn dus 0 en 1, anders dan die van A . Dus $A^2 \neq A$. Blijkbaar is A geen projectiematrix.

- (d) Laat $\mathbf{v}_1$ de eerste kolom van P zijn, $\mathbf{v}_2$ de tweede en $\mathbf{v}_3$ de derde. Dit zijn eigenvectoren bij respectievelijk de eigenwaarden 0, -1 en -1 en ze vormen een eigenbasis voor $\mathbb{R}^3$. Ga na dat $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Uit dit alles volgt dat

$$A^{481}\mathbf{x} = 0^{481}\mathbf{v}_1 + (-1)^{481}\mathbf{v}_2 + (-1)^{481}\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Ga na dat $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ en $A\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$, zodat de vectoren uit B tot de $\text{Nul}(A)$ behoren. Verder is de dimensie van $\text{Nul}(A)$ gelijk aan het aantal kolommen zonder pivot en dat is hier twee. Het aantal vectoren in B is dus gelijk aan de dimensie. Omdat geen van de twee vectoren een veelvoud van de andere is, is het ook een onafhankelijke verzameling. Conclusie: B is een basis voor $\text{Nul}(A)$.
- (b) Omdat B geen orthogonale basis is, zullen we eerst een orthogonale basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ voor W moeten maken. Dat doen we m.b.v. Gram-Schmidt. Neem dus $\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1$ en

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_2 - \frac{1}{3} \mathbf{v}_1 = (2/3, 1/3, -1/3, -1, 1)^T.$$

In plaats van deze neem ik liever $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -1, -3, 3)^T$, dus

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(Check: $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ staan inderdaad loodrecht).

Nu geldt

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \frac{2}{3} \mathbf{v}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{v}_2 = (2, 0, 0, -2, 2)^T.$$

De afstand van $\mathbf{b}$ tot W is de lengte van $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ en dat is $3\sqrt{3}$

- (c) Neem een matrix B met onafhankelijke kolommen waarvoor geldt dat $\text{Col}(B) = W$, bijvoorbeeld

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{24} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{24} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{24} \\ 0 & -3/\sqrt{24} \\ 0 & 3/\sqrt{24} \end{bmatrix}.$$

Dan is de gezochte matrix $B(B^T B)^{-1} B^T$. In het derde geval is $B^T B = I$ dus dan is de gezochte matrix BB^T .

6. (a) Noem de polynomen die de basis B' vormen p_1, p_2 en p_3 . De eerste kolom van $\begin{smallmatrix} C \\ B \leftarrow B' \end{smallmatrix}$ is $[p_1]_B$ en dus $[p_1]_B = (-1, 0, 1)^T$. Dat betekent dat

$$p_1 = -1(x^3 - 2) + 0(x^3 - 4x) + 1(x^3 + x^2) = x^2 + 2.$$

Op dezelfde manier volgt $[p_2]_B = (0, -1, 1)^T$ en dus

$$p_2 = 0(x^3 - 2) - 1(x^3 - 4x) + 1(x^3 + x^2) = x^2 + 4x.$$

Evenzo $[p_3]_B = (0, 1, 1)^T$ en dus

$$p_3 = 0(x^3 - 2) + 1(x^3 - 4x) + 1(x^3 + x^2) = 2x^3 + x^2 - 4x.$$

Conclusie: $B' = \{x^2 + 2, x^2 + 4x, 2x^3 + x^2 - 4x\}$.

$$(b) \quad [T]_{B \leftarrow B'} = [T]_{B \leftarrow B} C_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Er geldt $p(x) = 1(x^2 + 2) - 1(4x + x^2) + 1(2x^3 + x^2 - 4x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 2$ en

$$[T(p)]_B = [T]_{B \leftarrow B'} [p]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zodat $T(p) = -3(x^3 - 2) + 2(x^3 - 4x) = 6 - 8x - x^3$.

Een andere manier: Er geldt

$$[p]_B = C_{B \leftarrow B'} [p]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dus $p = -1(x^3 - 2) + 2(x^3 - 4x) + 1(x^3 + x^2) = 2x^3 + x^2 - 8x + 2$. Verder

$$[T(p)]_B = [T]_{B \leftarrow B} [p]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zodat $T(p) = -3(x^3 - 2) + 2(x^3 - 4x) = 6 - 8x - x^3$.

7. (a) Neem aan dat A een $n \times n$ matrix is. Zij $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ willekeurig gegeven. Merk op dat $A\mathbf{x} \in \text{Col } A$. Er is gegeven dat $\text{Col } A \subset \text{Nul } A$ en dus geldt ook dat $A\mathbf{x} \in \text{Nul } A$. Dat betekent dan $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. We hebben dus laten zien dat $A^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Er volgt dat $A^2 = 0$.
- (b) Neem $\mathbf{b} \in \text{Col } A$. Dan is er een $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Omdat $A^2 = 0$ volgt dat

$$A\mathbf{b} = A(A\mathbf{x}) = A^2\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dus $\mathbf{b} \in \text{Nul } A$.