

Tentamen lineaire algebra 1, TW1030  
 vrijdag 8 november 2013, 9.00-12.00 uur.

**ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.**

*Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden.*

*Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten 5 op te tellen en vervolgens te delen door 5.*

1. Gegeven zijn de volgende matrix en vector:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 2 \\ 1 & 0 & a \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

- (3) (a) Bepaal voor elke waarde van  $a$  de rang van  $A$ .
- (1) (b) Voor welke waarden van  $a$  is de matrix  $A$  inverteerbaar?
- (2) (c) Bepaal alle waarden van  $a$  en  $b$  waarvoor  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  oneindig veel oplossingen heeft.

2. Gegeven is de matrix  $A$  die we alvast geveegd hebben tot een echelonvorm  $F$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 4 & -8 \\ -2 & 6 & 0 & -5 & 10 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F,$$

We definiëren  $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ , waarbij  $\mathbf{v}_1$  de eerste kolom van  $A$  is,  $\mathbf{v}_2$  de tweede, enzovoorts. Tenslotte:  $\mathbf{w}_1$  de eerste kolom van  $F$ ,  $\mathbf{w}_2$  de tweede, enzovoorts.

- (2) (a) Is  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4\}$  een basis voor  $V$ ?
- (2) (b) Is  $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  een basis voor  $V$ ?
- (2) (c) Waar of niet waar:  $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5\}$ . Vergeet niet uit te leggen waarom!

3. Bewijs of weerleg:

- (2) (a) De vereniging  $U_1 \cup U_2$  van twee deelruimten  $U_1$  en  $U_2$  van een vectorruimte  $V$  is ook een deelruimte van  $V$ .
- (2) (b) Voor elke  $2 \times 2$  matrix  $A$  met de eigenschap dat  $A^2 = -2A$  geldt dat  $\det A = 0$  of  $\det A = 4$ .
- (2) (c) 8 is een eigenwaarde van de matrix  $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 12 & -8 & 4 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ .

(6) 4. Welke van de volgende matrices zijn wel en welke zijn niet reëel diagonaliseerbaar? Leg uit!

[AANWIJZING: Dit kan met weinig rekenwerk!]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Gegeven zijn de volgende matrix en vectoren:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (3) (a) Laat zien dat  $\mathbf{p}$  de orthogonale projectie van  $\mathbf{b}$  op de kolomruimte van  $A$  is. Geldt dat ook voor  $\mathbf{q}$ ?
- (2) (b) Bepaal een basis voor het orthogonale complement van de kolomruimte van  $A$ .
- (2) (c) Geef *een* kleinste kwadraten oplossing van het stelsel  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .  
(AANWIJZING: Als je het resultaat van (a) gebruikt kan dit met zeer weinig rekenwerk. Eén kleinste kwadraten oplossing volstaat.)

6. In  $P_3(\mathbb{R})$  is de verzameling  $B = \{x^3 - 2, x^3 - 4x, x^3 + x^2\}$  gegeven. Zonder bewijs mag je aannemen dat  $B$  een basis voor  $W = \text{Span}(B)$  is.

- (3) (a) Laat zien dat  $D = \{x^2 + 2, 4x + x^2, 2x^3 + x^2 - 4x\}$  ook een basis voor  $W$  is.
- (2) (b) Bepaal de overgangsmatrix  $C_{B \leftarrow D}$  (in de notatie van het boek is dat de matrix  $C_{D,B}$ ).
- (2) (c) Gegeven is de lineaire afbeelding  $T: W \rightarrow W$  waarvoor geldt

$$[T]_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bepaal  $[T]_{B \leftarrow D}$ . (In de notatie van het boek:  $[T]_{B \leftarrow B} = R_{B,B}$  en  $[T]_{B \leftarrow D} = R_{D,B}$ ).

- (2) (d) Voor het polynoom  $p$  uit  $W$  geldt  $[p]_D = (1, -1, 1)^T$ . Bepaal  $p$  en  $T(p)$ .

7. In  $M_{3,3}(\mathbb{R})$  is  $W$  de deelruimte van alle scheefsymmetrische matrices ( $A$  is scheefsymmetrisch als  $A^T = -A$ ). Je hoeft niet aan te tonen dat  $W$  werkelijk een deelruimte van  $M_{3,3}(\mathbb{R})$  is. We nemen een vaste matrix  $B \neq O$  in  $W$  en definiëren daarmee de afbeelding  $T: W \rightarrow W$  door  $T(X) = BX - XB$ .

- (2) (a) Leg uit dat  $T$  goed gedefinieerd is (dus dat voor elke  $X \in W$  geldt dat  $T(X) \in W$ ).
- (2) (b) Laat zien dat  $T$  een lineaire afbeelding is.
- (2) (c) Toon aan dat  $T$  niet injectief is.