

Uitwerking Tentamen lineaire algebra 1, TW1030, vrijdag 8 november 2013.

1. (a) Ga na:

$$\begin{bmatrix} a & a & 2 \\ 1 & 0 & a \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & -3 & 1 \\ a & a & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -3 & 1+2a \\ 0 & 3a & 6-3a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -3 & 1+2a \\ 0 & 0 & -a^2+a+6 \end{bmatrix}$$

Merk op dat $-a^2 + a + 6 = -(a-3)(a+2)$. De rang van A is gelijk aan het aantal pivots van A (na vegen) en dat is twee voor $a = 3$ en voor $a = -2$, anders drie.

- (b) A is inverteerbaar als en slechts als A in elke rij en in elke kolom een pivot heeft. Dat is als $a \neq -2$ en $a \neq 3$.
- (c) Dan moeten er twee of minder pivots zijn (anders is er bij dit stelsel precies één oplossing) en dus moet $a = -2$ of $a = 3$. Deze twee gevallen gaan we na. Eerst $a = -2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & b \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array} \right]$$

Voor $b = 4$ zijn er oneindig veel oplossingen (anders geen).

Nu $a = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & b \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array} \right]$$

Voor $b = -1$ zijn er oneindig

- (b) Waar: Omdat $A^2 = -2A$, hebben we $\det(A^2) = \det(-2A)$. Uit de rekenregels voor de determinant volgt dan dat $(\det A)^2 = (-2)^2 \det A$ en dus $(\det A)^2 - 4 \det A = 0$. Ontbinden tot $(\det A)(\det A - 4) = 0$ doet inzien dat $\det A = 0$ of $\det A = 4$.
- (c) Als 8 een eigenwaarde zou zijn, dan moet er een niet-nulvector $\mathbf{x}$ bestaan zo dat $A\mathbf{x} = 8\mathbf{x}$ ofwel $(A - 8I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ga na dat vegen van $A - 8I$ een echelonvorm geeft met in elke kolom een pivot. Dat betekent dat het stelsel maar $(A - 8I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ maar één oplossing heeft: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Blijkbaar is 8 geen eigenwaarde van A .
Alternatief: laat zien dat $\det(A - 8I) \neq 0$.

4. Matrix C is symmetrisch en dus zeker diagonaliseerbaar (zelfs orthogonaal diagonaliseerbaar). De matrices A en B zijn bovendriehoeksmatrices. De eigenwaarden staan dus op de diagonaal. Ze hebben beide eigenwaarden 1 (met a.m. 2) en 3 (met a.m. 1). Zo'n matrix is diagonaliseerbaar als de m.m. van eigenwaarde 1 ook 2 is. De meetkundige multipliciteit van eigenwaarde 1 is de dimensie van de bijbehorende eigenruimte. Bij matrix A is dat $\text{Nul}(A - I)$ en bij B is dat $\text{Nul}(B - I)$. Nu geldt

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Voor de matrix A is de a.m. van eigenwaarde 1 blijkbaar 1 en A is daarom niet diagonaliseerbaar. Voor de matrix B is de a.m. van eigenwaarde 1 blijkbaar 2 en A is daarom wel diagonaliseerbaar.

5. (a) $\mathbf{p}$ is gelijk aan de eerste minus de tweede kolom van A dus $\mathbf{p} \in \text{Col}(A)$. Verder is $\mathbf{b} - \mathbf{p} = (1, 1, 2, -2)$ en deze staat loodrecht op alle kolommen van A (het inwendig product is telkens nul), zodat $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in \text{Col}(A)^\perp$. Conclusie: $\mathbf{p}</$

6. (a) Het aantal vectoren in D is gelijk aan drie, dus gelijk aan de dimensie van $\text{Span}(B)$. Verder behoren ze alle drie tot $\text{Span}(B)$ want $x^2 + 2 = -(x^3 - 2) + (x^3 + x^2)$, $4x + x^2 = -(x^3 - 4x) + (x^3 + x^2)$ en $2x^3 + x^2 - 4x = (x^3 - 4x) + (x^3 + x^2)$. Tenslotte zijn het onafhankelijke polynomen want uit $c_1(x^2 + 2) + c_2(4x + x^2) + c_3(2x^3 + x^2 - 4x) = 0$ volgt $2c_1 + (4c_2 - 4c_3)x + (c_1 + c_2 + c_3)x^2 + 2c_3x^3 = 0$ en dus $c_1 = 0$, $4c_2 - 4c_3 = 0$, $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ en $2c_3 = 0$. Maar dan moeten alle drie de c_i nul zijn. Conclusie: D is een basis voor $P_3(\mathbb{R})$.

- (b) Uit het voorgaande volgt dat $[x^2 + 2]_B = (-1, 0, 1)^T$, $[4x + x^2]_B = (0, -1, 1)^T$ en $[2x^3 + x^2 - 4x]_B = (0, 1, 1)^T$.

$$\text{Dus } {}_{B \leftarrow D} C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \quad {}_{B \leftarrow D} [T] = {}_{B \leftarrow B} [T] {}_{B \leftarrow D} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \quad p(x) = 1(x^2 + 2) - 1(4x + x^2) + 1(2x^3 + x^2 - 4x) = 2 - 8x + x^2 + 2x^3 \text{ en}$$

$$[T(p)]_B = {}_{B \leftarrow D} [T] [p]_D = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{zodat } \mathcal{L}(p) = -3(x^3 - 2) + 2(x$$