

Deeltentamen Analyse 1 (TW1040)
Donderdag 22 december 2016, 9h00 - 11h00

Het gebruik van een boek of aantekeningen is bij dit deeltentamen **niet** toegestaan. Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine wel, maar niet het gebruik van een grafische rekenmachine.

Elke vraag is 1.5 punt waard. Per vraag heeft ieder onderdeel hetzelfde gewicht (i.e. is dus evenveel waard). Het eindcijfer is dan het aantal behaalde punten +1.

1. Bereken de volgende limieten:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3+2x}},$

(b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - 9}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x^2) + \sin^2(\pi x)}{x^2}.$

2. Gebruik de formele definitie van limiet (dus met ε 's en δ 's) om aan te tonen dat:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 \cos x = 0.$$

3. Voor een functie $f : [1, 3] \rightarrow [0, \infty)$ is gegeven dat $f(2) = 2$ en $f'(2) = 3$. Verder is de functie $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$g(x) = \sqrt{\frac{6xf(x)}{x^2 + f(x)}}.$$

Gebruik dan de rekenregels voor afgeleiden om $g'(2)$ te bepalen.

4. Laat f een continue functie zijn op $[a, b]$, die differentieerbaar is op (a, b) . Zij verder gegeven dat $f'(x) < 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Bewijs met behulp van de *Middelwaardstelling*¹ dat f een strikt dalende functie is op $[a, b]$ (dus dat voor alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ met $x_1 < x_2$ er geldt dat $f(x_1) > f(x_2)$).

Opgaven 5 en 6 staan op de volgende bladzijde.

¹Geef in uw antwoord duidelijk aan hoe u de *Middelwaardstelling* gebruikt.

5. Laat $a, b \in \mathbb{R}$, en laat de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = \begin{cases} ax + e^x & \text{als } x \leq 0 \\ x + b e^{-x}, & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Voor welke $a, b \in \mathbb{R}$ is f continu in $x = 0$?
- (b) Voor welke $a, b \in \mathbb{R}$ is f differentieerbaar in $x = 0$?

6. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende definitie af:

Definitie: Laat f een reëelwaardige functie zijn gedefinieerd op een interval I dat het punt c bevat (c kan ook een eindpunt van I zijn). Dan zeggen we dat f differentieerbaar is in c (of dat f een afgeleide heeft in c) als de limiet

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$\dots\dots\dots$ en $\dots\dots\dots$ is.

We noteren de afgeleide van f in c door $\dots\dots\dots$.

(b) Bewijs de volgende stelling:

Stelling: Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Neem aan dat de functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een maximum aanneemt in een punt $c \in (a, b)$. Als f differentieerbaar is in c , dan geldt er dat $f'(c) = 0$.

EINDE