

Tentamen Analyse 1 (TW1040)
Vrijdag 29 Januari 2016; 09.00 - 12.00 uur

*Het gebruik van een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine is bij dit tentamen **niet** toegestaan. Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine wel.*

Elke vraag heeft hetzelfde gewicht en per vraag heeft ieder onderdeel hetzelfde gewicht.

1. Ga na of de volgende limieten bestaan, en wat de waarde is. Geef duidelijk aan hoe u aan uw resultaat komt. Als de limiet niet bestaat, geef dan duidelijk aan waarom niet.

(a) $\lim_{x \uparrow 1} \frac{\sin \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}};$ (*Hint: $1-x^2 = (1-x)(1+x)$*).

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x};$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x \sqrt{e^{2x} + 1} - e^{2x}).$

2. Laat $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, en laat $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn die differentieerbaar is in het punt c , en laat $g(x) \neq 0$ voor elke $x \in [a, b]$. Bewijs dan met behulp van de definitie van afgeleide dat de functie $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$h(x) = \frac{1}{g(x)}, \quad \text{voor } x \in [a, b],$$

differentieerbaar is in het punt c , met afgeleide $h'(c) = \frac{-g'(c)}{(g(c))^2}$.

3. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ en laat de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + ax, & \text{als } x \geq 1, \\ a + b, & \text{als } x < 1. \end{cases}$$

- (a) Voor welke waarden van a en b is f continu?
 (b) Voor welke waarden van x en b is f differentieerbaar?

4. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende Stelling af:

Stelling (Middelwaardestelling). Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Laat $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn die is op (a, b) . Dan bestaat er een $\xi \in (a, b)$ waarvoor geldt

$$\dots\dots\dots = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}.$$

- (b) Toon aan¹ dat voor $x > 0$ en voor $-1 \leq x < 0$ er geldt dat

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

¹*Hint: dit kan mbv. de Middelwaardestelling, maar een ander correct bewijs is natuurlijk ook goed.*

5. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende Stelling af:

Stelling. Laat f een functie op $[a, b]$ zijn. Dan is f integreerbaar dan en slechts dan als voor iedere er een partitie P van $[a, b]$ bestaat zo dat

$$\dots\dots\dots - \dots\dots\dots < \dots\dots$$

- (b) Laat $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $a < b < c$, en laat f een functie zijn die integreerbaar is op $[a, b]$ en ook op $[b, c]$. Toon aan dat f integreerbaar is op $[a, c]$.

6. Bereken de volgende integralen:

(a) $\int_1^2 e^{\sqrt{x}} dx.$

Hint: een handige observatie is, dat $e^{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$ voor $x \in [1, 2]$.

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x}}.$

7. Geef aan of de onderstaande oneigenlijke integralen convergeren of divergeren, en laat ook zien waarom u dat denkt.

(a) $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x+1} dx.$

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx.$

8. Bepaal de uitkomst van de volgende oneindige² som: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}.$

9. (a) Laat zien dat dat het derde-orde Taylor-polynoom $y = P_3(x)$ van $f(x) = \tan x$ om $c = 0$ gegeven wordt door: $P_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3.$

- (b) Men kan laten zien dat de Maclaurin-reeks van $\tan x$ gegeven wordt door: $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots$, en dat de convergentiestraal van deze Maclaurin-reeks $\pi/2$ is (dit mag u allemaal als gegeven gebruiken). Een andere klassieke Maclaurin-reeks is:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \text{voor } x \in \mathbb{R}.$$

Bepaal³ de volgende limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{3 \tan x - \tan 3x}.$$

EINDE

²U mag op dit tentamen gebruiken dat $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ als $-1 < x < 1$.

³m.b.v. deze gegevens, of op een andere legale manier ... u bent daar helemaal vrij in!