

Tentamen Analyse 1 (TW1040)

Eg. jan. 2016

(1) (a) $\lim_{x \uparrow 1} \frac{\sin \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{\sin \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Zet $y = \sqrt{1-x}$ en

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{\sin(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\text{standaard}}{\lim_{y \downarrow 0}} 1.$$

Verder is

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Tenzamen geeft dit:

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{\sin \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \cos x}$ type "0/0" dus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}$ ^{u.v. 1}
de l'Hôpital's rule

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} -\cos^2 x \cdot \frac{(\cos x - 1)^{-1}}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{-1}{2}.$$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x \sqrt{e^{2x} + 1} - e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x (\sqrt{e^{2x} + 1} - e^x)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x (\sqrt{e^{2x} + 1} - e^x) \cdot \frac{\sqrt{e^{2x} + 1} + e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1} + e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1} + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1} + e^x} \cdot \frac{1}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{e^{2x}}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

(2) Laat $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn die differentieerbaar is in $c \in (a, b)$, en laat $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Definieer $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$h(x) = \frac{1}{g(x)}, \text{ voor } x \in [a, b].$$

Dan is h differentieerbaar in $x=c$, met afgeleide $h'(c) = -g'(c)/(g(c))^2$.

Tuurs: Beschouw de Quot

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(c)}}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{g(c) - g(x)}{g(x)g(c)}}{x - c} = - \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \cdot \frac{1}{g(x)g(c)} \end{aligned}$$

Bedenk, dat gegeven is dat g differentieerbaar is in $x=c$, dus $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$

bestaat en is eindig (is gelijk aan $g'(c)$). Verder volgt uit het feit dat g differentieerbaar is in $x=c$ dat g continu is in $x=c$, en dus dat

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)g(c)} = \frac{1}{(g(c))^2}.$$

Tezamen geeft dit, dat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \cdot \frac{-1}{g(x)g(c)} \\ &= \frac{-g'(c)}{(g(c))^2} \end{aligned}$$



(3) Laat de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + ax, & \text{als } x \geq 1 \\ a+b, & \text{als } x < 1. \end{cases}$$

(a) Voor elke $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$, is het duidelijk dat f continu is. We hoeven alleen het geval $x=1$ te bekijken. $\exists \epsilon$ geldt

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = f(1) = a+1$$

$$\text{en } \lim_{x \uparrow 1} f(x) = a+b,$$

dus f is continu in $x=1$ als $a+b = a+1$,
dus als $\boxed{a \in \mathbb{R} \text{ en } b=1}$.

(b) Om te zien hoe we alleen voor $x=1$ te kijken, het is direct duidelijk dat

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} + a, & \text{als } x > 1 \\ 0, & \text{als } x < 1. \end{cases}$$

Merkp op, dat

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \downarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + ax) - (1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \downarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1) + a(x-1)}{x-1} = \lim_{x \downarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + a \right) \\ &= \lim_{x \downarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + a \right) = a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Verder is

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{f(x) - (a)}{x-1} = \lim_{x \uparrow 2} \frac{(\cancel{x+b}) - (\cancel{x+1})}{x-1}$$

en deze limiet bestaat $\Leftrightarrow$ eindig als $b=1$ (en de waarde van de limiet $=0$ (als $b=1$)).

We zien dus, dat f differentieerbaar is als $a=-\frac{1}{2}$ en $b=1$. Dat laatste weten wij al, want als $b \neq 1$, dan is f niet continu in $x=1$, en dus zeker niet differentieerbaar.

(4) (a) Continue differentieerbaar

$$f'(3) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

(b) Definieer $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ door: $f(x) = \sqrt{1+x}$,
laat eerst $x > 0$.

Voor $t \in [0, x]$ is f dan een continue functie op $[0, x]$, die differentieerbaar is op $(0, x)$. Dus bestaat er volgens de MWS (= Middelwaarde stelling) een $\xi \in (0, x)$, zodat

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$$

tevel:

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} \quad (*)$$

Indat $0 < \xi < x$ $\Rightarrow$ $2 < 2\sqrt{1+\xi}$, en dus

$$\frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} < \frac{1}{2} \quad (**)$$

Als we nu ~~(**)~~ in (*) invullen volgt er dat

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2}$$

en omdat $x > 0$ zien we dat $\sqrt{1+x} < \frac{1}{2}x$,
en dus dat

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x.$$

Laat nu $x \in [-1, 0)$,

phijew is f continue op $[x, 0]$ en differen-
tieerbaar op $(x, 0)$, dus volgens de MWS
bestaat er een $\xi \in (x, 0)$, zodat

Hand

$$\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(\xi).$$

$$\frac{1 - \sqrt{1+x}}{-x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} \quad \boxed{\times}$$

Nu is $-1 \leq x < \xi < 0$, dus $0 < 2\sqrt{1+\xi} < 2$,
waardoor we vinden dat

$$\frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} > \frac{1}{2} \quad \boxed{\times \times \times}$$

Uit $\boxed{\times}$ en $\boxed{\times \times \times}$ volgt dat

$$\frac{1 - \sqrt{1+x}}{-x} > \frac{1}{2},$$

en omdat $-x > 0$ geeft kruislings vermenig-
vuldigen dat

$$1 - \sqrt{1+x} > -\frac{1}{2}x,$$

en dus, dat

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x \quad \boxed{\times}$$

(5) (a) begrensd $\varepsilon > 0$

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

(b) Gegeven is, dat f integreerbaar is op $[a, b]$ en op $[b, c]$. Volgens de Stelling in onderdeel (a) bestaan er bij elke $\varepsilon > 0$ dus partities

$$P_{[a,b]} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

en

$$P_{[b,c]} = \{y_0 = b < y_1 < \dots < y_m = c\}$$

zodanig dat

$$U(f, P_{[a,b]}) - L(f, P_{[a,b]}) < \varepsilon/2$$

$$U(f, P_{[b,c]}) - L(f, P_{[b,c]}) < \varepsilon/2.$$

$$\text{Laat } P = P_{[a,b]} \cup P_{[b,c]} = \{x_0 = a < \dots < x_n = b = y_0 < \dots < y_m = c\}$$

Men geldt er dat

$$U(f, P) - L(f, P)$$

$$= (U(f, P_{[a,b]}) + U(f, P_{[b,c]})) - (L(f, P_{[a,b]}) + L(f, P_{[b,c]}))$$

$$= \underbrace{U(f, P_{[a,b]}) - L(f, P_{[a,b]})}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{U(f, P_{[b,c]}) - L(f, P_{[b,c]})}_{< \varepsilon/2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Men kan volgt uit de Stelling in onderdeel (a) van deze opgave dat f integreerbaar is op $[a, b]$.
Immers: f is ook begrensd!



⑥ (a) $\int_1^2 e^{\sqrt{x}} dx$ Hint! $\int_1^2 \underbrace{2\sqrt{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}\right)}_{g(x)} dx$

$$= \left[\underbrace{2\sqrt{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{g(x)} \right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{2}{2\sqrt{x}}}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{g(x)} dx$$

en $f(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$g(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$= (2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - 2e) - 2 \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - 2e - 2 \left[e^{\sqrt{x}} \right]_1^2$$

$$= 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - 2e - 2(e^{\sqrt{2}} - e)$$

$$= 2(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}}$$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$ set $t = \sqrt{2x}$ $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t dt}{1+t}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = t dt$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t+1-1}{t+1} dt = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \left[t - \ln|t+1| \right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})$$

⑦ (a) $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x+1} dx$. Hint: anige "bestige funkt"
 u $x = -1$. Werk op, dat vor
 $x \in [-1, 1]$ ergeldt dat $e^x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$

das

$$\frac{e^x}{x+1} > \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{e}$$

und

$$\int_c^1 \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{e} [\ln|1+x|]_c^1$$

$$= \frac{1}{e} (\ln(2) - \ln|1+c|) \rightarrow \infty \text{ as } c \downarrow -1$$

Weges, hat Majoranten-Minoranten-Kennzeichen
 $\int \frac{e^x}{1+x} dx$ das divergiert.

OPGAVE 7B STAAT NA OPGAVE 9B

8

Beschleunigung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Merk op, dat

$$\frac{1}{n} x^n = \int_0^x t^{n-1} dt, \text{ voor } n \geq 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1} dt$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} \right) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1} dt$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt \quad \text{ob } |x| < 1 \quad \int_0^x \frac{1}{1-(-t)} dt$$

$$= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = [\ln|1+t|]_0^x = \ln(1+x)$$

Nam $x = \frac{1}{2}$, dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2)$$

11

9) a) $f(x) = \tan x$, das $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2}$, zudem

$$f''(x) = -2 \cdot (\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

e $f'''(x) = -6 (\cos x)^{-4} \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \frac{\cos x}{\cos^3 x}$

$$= \frac{-6 \sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x}$$

Wird dann

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

$$f''(0) = \frac{2 \cdot \sin 0}{\cos^3 0} = 0 \quad \text{e} \quad f'''(0) = -\frac{6 \cdot 0}{1} + 2 = 2$$

Wird dann

$$y = P_3(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$$

$$= x + \frac{1}{3} x^3$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{3 \tan x - \tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots) - (\cancel{3x} - \frac{9}{2}x^3 + \frac{3}{5!}x^5 - \dots)}{3(\cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 - \dots) - (\cancel{3x} + 9x^3 + \frac{2}{5} \cdot 3^5 x^5 - \dots)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{5!}x^5 + \frac{9}{2}x^3 - \frac{3}{5!}x^5 - \dots}{-8x^3 + 0x^5 - \dots}$$

$$= \frac{8/2}{-8} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Wir können dies auch mit der l'Hôpital Regel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{3 \tan x - \tan(3x)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x - 3 \cos 3x}{\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{3}{(\cos 3x)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\frac{(\cos 3x)^2 - \cos^2 x}{(\cos^2 x)(\cos 3x)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^2 (\cos 3x)^2 \cdot \frac{\cos x - \cos 3x}{(\cos 3x)^2 - (\cos x)^2}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^2 (\cos 3x)^2 \cdot \frac{(\cancel{\cos 3x} - \cos x) \cdot 1}{(\cos 3x - \cancel{\cos x})(\cos 3x + \cos x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^2 (\cos 3x)^2}{\cos 3x + \cos x}$$

$$= \frac{-1^2 \cdot 1^2}{1+1} = \left(-\frac{1}{2} \right) \quad \ddot{\smile}$$

HP

7b

De oneigenlijke integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

"bertast" eigenlijk uit twee oneigenlijke integralen:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \quad \text{en} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

— Eerst $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$:

Merk op, dat $\sqrt{x+x^3} \geq \sqrt{x}$, dus als $x \in [c, 1]$, met $c > 0$, dan is

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

en dus is

$$\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \leq \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_c^1 = 2 - 2\sqrt{c}$$

Neem nu $\lim_{c \downarrow 0}$: we zien dat

$$0 \leq \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \leq \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \downarrow 0} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

Dus $0 \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \leq 2$.

7(i)

— Het gezeel $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ gaat op een vergelijkbare manier: voor $x \geq 1$ geldt er dat

$$\sqrt{x+x^3} \geq \sqrt{x^3} = x^{3/2}$$

dus

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$$

Daar

$$\int_1^R \frac{dx}{x^{3/2}} = \left[-2x^{-1/2} \right]_1^R = 2 - \frac{2}{\sqrt{R}}$$

zien we dat

$$0 \leq \int_1^R \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \leq \int_1^R \frac{dx}{x^{3/2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{R}} \xrightarrow[\substack{\text{als} \\ R \rightarrow \infty}]{2} 2$$

Dus

$$0 \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \leq 2.$$

Tezamen zien we dat de ondergeteelde integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \text{ en } \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

convergent zijn, en dus $\Rightarrow$ ook

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

convergeert. Bovendien geldt er dat

$$0 \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \leq 2 + 2 = 4.$$