

Deeltentamen Analyse 1 (TW1040)
Donderdag 10 december 2015; 09.00 - 11.00 uur

*Het gebruik van een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine is bij dit deeltentamen **niet** toegestaan. Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine wel.*

Ieder onderdeel van elke vraag heeft hetzelfde gewicht (i.e. is dus evenveel punten waard).

1. Ga na of de volgende limieten bestaan, en wat de waarde is. Geef duidelijk aan hoe u aan uw resultaat komt. Als de limiet niet bestaat, geef dan duidelijk aan waarom niet.

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ (maak dit onderdeel zonder de l'Hôpital te gebruiken);

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)^2}{\ln(1 + x^2)}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cos x}{\sqrt{x^2 - x}}$;

2. Gebruik alleen de formele definitie van limiet (dus met ε 's en δ 's, maar zonder stellingen en andere resultaten te gebruiken) om aan te tonen dat:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1.$$

3. De functie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x) = \sqrt{2 + x + 2x^2} \sin x$.

(a) Bepaal voor $x \in [-1, 1]$ de afgeleide $f'(x)$ van $f(x)$.

(b) Gebruik uw antwoord uit onderdeel (a) om de vergelijking van de raaklijn in $x = 0$ aan f te bepalen.

4. Laat $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, en laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ functies zijn die differentieerbaar zijn in het punt c . Bewijs dan dat geldt dat de functie $f \cdot g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \text{voor } x \in [a, b],$$

differentieerbaar is in het punt c , met afgeleide

$$(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

5. Geef een bewijs van de volgende stelling, waarin u de resultaten/stellingen die u gebruikt noemt, en duidelijk aangeeft hoe u deze gebruikt:

Stelling. *Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie die differentieerbaar is op (a, b) . Als $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a, b)$, dan is f strikt stijgend op $[a, b]$ (dwz. als $a \leq x < y \leq b$, dan is $f(x) < f(y)$).*

6. Beschouw de functie f , gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4x^4+1}{x^2+2}} + 2x, & x \leq -2, \\ \frac{x^3 - x^2 - 6x}{(x^2 - 4)(x - 3)}, & x > -2, \ x \neq 2, \ x \neq 3. \end{cases}$$

(a) Leg uit waarom f continu is op $(-\infty, -2)$;

(b) Is f continu in $x = -2$? Vergeet niet uit te leggen waarom wel/niet!

(c) Bepaal $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Einde.