Uitwerking deeltentamen Analyse 1 (TW1040) van donderdag 10 december 2015

1 (a) Bedenk dat $(x^3+1) = (x+1)(x^2-x+1)$ (dit zie je 'op z'n janboeren-fluitjes, of door een staartdeling:

$$
\begin{array}{l}
x+1 \,/\, x^3 \qquad\qquad +1 \,\backslash\, x^2-x+1 \\
\qquad\quad \underline{x^3+x^2} \;- \\
\qquad\qquad -x^2 \\
\qquad\quad \underline{-x^2-x} \;- \\
\qquad\qquad\qquad x\;+1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x+1} \;- \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Maar dan zien we dat

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}_1}$$

$$= \lim_{x\to -1} (x^2-x+1) = (-1)^2-(-1)+1 = 3$$

[met de l'Hôpital zou deze opgave kinderspel zijn:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} \underset{\text{type } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{1}$$

$$= 3\cdot(-1)^2 = 3$$
]

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x}-1)^2}{\ln(1+x^2)} \underset{\text{type } \frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(e^{2x}-1)\cdot \cancel{2}e^{2x}}{\frac{1}{1+x^2}\cdot \cancel{2}x}$

$\underset{\text{type } \frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(2e^{2x}-0)\cdot e^{2x} + 2(e^{2x}-1)\cdot 2e^{2x}}{\frac{1\cdot(1+x^2)-2x\cdot x}{(1+x^2)^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4e^{4x} + 4e^{2x}(e^{2x}-1)}{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}} = \dfrac{4\cdot 1 + 4\cdot 0}{\frac{1}{1^2}} = 4$

Anders: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x}-1)^2}{\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{2x}-1}{x-0}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2}{\ln(1+x^2)}$

Bedenk nu, dat $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{2x}-1}{x-0}\right)^2 = \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x-0}\right)^2$

omdat de functie $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x)=x^2$ continu is op $\mathbb{R}$, en dus zeker in $x=0$.

Verder is $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$,

als $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gedefinieerd is door $g(x)=e^{2x}$.

Dus $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2\cdot e^{2\cdot 0} = 2$.

Tenslotte is $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{z\downarrow 0} \dfrac{1}{\frac{\ln(1+z)}{z-0}}$

en omdat $\lim\limits_{z\downarrow 0} \dfrac{\ln(1+z)}{z} = \lim\limits_{z\downarrow 0} \dfrac{h(z)-h(0)}{z-0} = h'(z)$,

met $h(x)=\ln(1+x)$, volgt dat

$$\lim_{z \downarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Alles tezamen vinden we dat:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)^2}{\ln(1+x^2)} = 2^2 \cdot \frac{1}{1} = 4$$

(c) Bedenk dat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = 1$$

Dus $\lim_{x\to\infty} \frac{x\cos x}{\sqrt{x^2-x}}$

bestaat niet.

(2) Er geldt dat $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$.

Immers: laat $\varepsilon > 0$ willekeurig, en kies $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$

Dan geldt er zeker, als $x \in \mathbb{R}$ en $0 < |x-1| < \delta \leq 1$, dat

$$0 < x < 2, \text{ zodat } 1 < x+1 < 3, \text{ en dus}$$

zeker dat $$1 < |x+1| < 3.$$

Maar dan geldt er voor $x \in \mathbb{R}$ met $0 < |x-1| < \delta$ dat

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = \underbrace{|x-1|}_{<\delta} \cdot \underbrace{|x+1|}_{<3} < 3\delta \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\blacksquare$

---

(3) De functie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \sqrt{2 + x + 2x^2 \sin x}$$

(a) Omdat $f(x) = (2 + x + 2x^2 \sin x)^{1/2}$, volgt dat

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(2 + x + 2x^2 \sin x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1 + 4x\sin x + 2x^2 \cos x)$$

$$= \frac{1 + 4x\sin x + 2x^2\cos x}{2\sqrt{2 + x + 2x^2 \sin x}}$$

(b) Omdat $f(0) = \sqrt{2+0+0} = \sqrt{2}$ en

$$f'(0) = \frac{1 + 0 + 0 \cdot 1}{2\sqrt{2+0+0}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

zien we dat de raaklijn aan f in $x=0$ gegeven wordt door

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\underset{\text{invullen}}{=} \frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot x + \sqrt{2}.$$

---

(4) Gegeven is, dat $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, en $c \in \mathbb{R}$, met $a<c<b$. Verder zijn $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ functies die differentieerbaar in $x=c$. Laat de functie $f\cdot g:[a,b]\to\mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x), \text{ voor } x\in[a,b].$$

Dan is $f\cdot g$ differentieerbaar in $x=c$.

Immers: We moeten aantonen dat

$$\lim_{x\to c} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(c)}{x-c}$$

bestaat en eindig is (en gelijk aan $f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$)

Welnu:

$$\lim_{x\to c} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(c) + f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(x)(g(x)-g(c)) + (f(x)-f(c))g(c)}{x-c}$$

$$= \lim_{x \to c} \left(f(x) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(c) \right)$$

$(*)$

Bedenk nu, dat f differentieerbaar is in $x = c$, en dus continu is in $x = c$, zodat

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

èn (wegens de continuïteit in $x = c$)

$$f(c) = \lim_{x \to c} \left(f(x) \right)$$

Verder volgt uit de differentieerbaarheid van g in $x = c$ dat

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

Alles tezamen vinden we

$$\lim_{x \to c} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(c)}{x - c} \underline{\underline{\ (*)\ }}$$

$$= \lim_{x \to c} \left(f(x) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(c) \right)$$

$$= f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c),$$

hetgeen is wat we moeten aantonen. $\blacksquare$

(5) Stelling laat $a,b \in \mathbb{R}$ met $a<b$. Zij $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ een continue functie die differentieerbaar is op (a,b). Als $f'(x)>0$ voor alle $x\in(a,b)$, dan is f strikt stijgend op $[a,b]$ (dwz: als $a<x<y\le b$, dan is $f(x)<f(y)$).

Bewijs: laat $x,y\in[a,b]$, met $x<y$. We moeten dus aantonen dat $f(x)<f(y)$.
Omdat f continu is op $[a,b]$ is f zeker continu op $[x,y]$. Omdat f differentieerbaar is op (a,b), is f zeker differentieerbaar op (x,y), dus wegens de MWS (= Middelwaarde Stelling) bestaat er een $c\in(x,y)$, zodat

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c) \qquad (*)$$

Voor alle $x\in(a,b)$ geldt er: $f'(x)>0$, dus geldt er zeker dat $f'(c)>0$. Omdat $x<y$ volgt daar $y-x>0$, dus uit $(*)$ volgt nu direct dat

$$f(y)-f(x)=\underbrace{f'(c)}_{>0}\underbrace{(y-x)}_{>0}>0,$$

en dus dat $f(y)>f(x)$ $\blacksquare$

6 Beschouw de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{4x^4+1}{x^2+2}\right)} + 2x, & \text{als } x \leq -2 \\ \frac{x^3 - x^2 - 6x}{(x^2-4)(x-3)}, & \text{als } x > -2,\ x \neq 2,\ x \neq 3 \end{cases}$$

(a) Voor $x < -2$ is f de samenstelling van allemaal keurige continue functies, en dus continu

(b) Gegeven is, dat $f(-2) = \sqrt{\frac{4 \cdot (-2)^4 + 1}{(-2)^2 + 2}} - 4$

$$= \sqrt{\frac{65}{6}} - 4$$

Verder is

$$\lim_{x \downarrow -2} f(x) = \lim_{x \downarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - 6x}{(x^2-4)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \downarrow -2} \frac{x(x^2 - x - 6)}{(x^2-4)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \downarrow -2} \frac{x\cancel{(x+2)}\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}\cancel{(x-3)}}$$

$$= \lim_{x \downarrow -2} \frac{x}{x-2} = \frac{-2}{-2-2} = \frac{1}{2}$$

We zien dat $\frac{1}{2} \neq \sqrt{\frac{65}{6}} - 4$; f is <u>NIET</u> continu in $x = -2$.

$$(c) \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{4x^4+1}{x^2+2}} + 2x \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\left(\frac{4x^4+1}{x^2+2}\right)} + 2x \right) \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{4x^4+1}{x^2+2}\right)} - 2x}{\sqrt{\left(\frac{4x^4+1}{x^2+2}\right)} - 2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{4x^4+1}{x^2+2} - 4x^2}{\sqrt{\left(\frac{4x^4+1}{x^2+2}\right)} - 2x} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{\cancel{4x^4+1}}{x^2+2} - \frac{\cancel{4x^4} + 8x^2}{x^2+2}}{\sqrt{\left(\frac{4x^4+1}{x^2+2}\right)} - 2x} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{8x^2}{(x^2+2)\left(\sqrt{\frac{4x^4+1}{x^2+2}} - 2x\right)} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{\Big(1 + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}\Big)\Big(\underbrace{\sqrt{\left(\frac{4x^4+1}{x^2+2}\right)} - 2x}_{\to \infty}\Big)} = 0$$