

Tentamen Analyse 1 (TW1040)
Vrijdag 30 januari 2015; 9.00 - 12.00 uur

*Het gebruik van een boek of aantekeningen is bij deze toets **niet** toegestaan. Het gebruik van een **eenvoudige** rekenmachine wel.*

Elke vraag heeft hetzelfde gewicht en per vraag heeft ieder onderdeel hetzelfde gewicht.

1. Ga na of de volgende limieten bestaan, en wat de waarde is. Geef duidelijk aan hoe u aan uw resultaat komt. Als de limiet niet bestaat, geef dan duidelijk aan waarom niet.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 7}}{\log x + 3x^2 - x\sqrt{x} - 3}.$

(b) $\lim_{x \uparrow \pi/2} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right).$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + x^3} e^{\sin(\pi/x)}.$

2. Toon aan met behulp van de **definitie van limiet**¹ dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

3. (a) Laat de functie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = \frac{x \cdot e^{\cos(x^2)}}{\sqrt{x+2}}.$$

Gebruik de rekenregels voor afgeleiden om voor $x \in [0, \infty)$ de afgeleide $f'(x)$ te bepalen.

- (b) Geef een bewijs van de **productregel** voor differentiëren. Dus als $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in $c \in I$, toon dan aan met behulp van de definitie van afgeleide dat de functie fg differentieerbaar is in c , en dat er geldt dat

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

4. Toon aan met behulp van de definitie van integreerbaarheid dat de functie $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{als } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

Riemann-integreerbaar is op $[0, 2]$, en bereken de waarde van $\int_0^2 f(x) dx$ met behulp van de definitie van de Riemann-integraal.

5. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door het voorschrift

$$f(x) = |x| e^{-x^2} + 1.$$

- (a) Is f differentieerbaar in 0? Beargumenteer het antwoord.

¹Dus door ε 's en N 's te gebruiken.

- (b) Bepaal de eventuele maxima's, minima's en asymptoten van f .
 (c) Maak een schets van de grafiek van f .

6. Bereken de volgende onbepaalde integralen:

(a) $\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} \, dx.$

(b) $\int x \arctan x \, dx.$

7. De *gammafunctie* $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd met behulp van de volgende oneigenlijke integraal:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

- (a) Laat zien² dat de integraal convergent is voor elke $x > 0$.
 (b) Toon aan dat $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ voor $x > 0$.
 (c) Toon aan dat $\Gamma(n+1) = n!$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$.
Hint: u mag het resultaat van onderdeel (b) hierbij gebruiken.

8. Laat $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad \text{voor } -1 < x < 1.$$

Toon aan dat de machtreeks (Maclaurin-reeks) van f gegeven wordt door:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Hint: voor het oplossen van deze opgave kunt u de *meetkundige reeks* gebruiken:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{voor } -1 < x < 1.$$

9. Enkele klassieke Maclaurin reeksen zijn:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{voor alle } x \in \mathbb{R}),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (\text{voor alle } x \in \mathbb{R}).$$

Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = (\sin x) e^{x^2}, \quad \text{voor } x \in \mathbb{R},$$

en laat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de Maclaurin-reeks van f zijn. Bepaal dan de eerste drie coëfficiënten a_n verschillend van 0.

EINDE

²Dit laat zien dat de *gammafunctie* goed gedefinieerd is.