

TENTAMEN ANALYSE 1 (TW1040) 30/01/2015

1

$$\begin{aligned}
 (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^4+7}}{\log x + 3x^2 - x\sqrt{x} - 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^4+7}}{\log x + 3x^2 - x\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{7}{x^4}}}{\frac{\log x}{x^2} + 3 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{3}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

Annotations: "do x → ∞" points to the fraction; "type 0/0" points to the denominator terms; "pas dus de l'Hôpital" is written below the denominator.

$$\begin{aligned}
 (b) \lim_{x \uparrow \pi/2} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right) &= \lim_{x \uparrow \pi/2} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\
 &= \lim_{x \uparrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \quad \begin{array}{l} \text{type "0/0"} \\ \text{pas dus de l'Hôpital} \end{array} \lim_{x \uparrow \pi/2} \frac{-\cos x}{-\sin x} \\
 &= \lim_{x \uparrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{0}{1} = 0
 \end{aligned}$$

(c) Als $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, dan $\sin(\frac{\pi}{x}) \in [-1, 1]$, dus voor $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geldt $e^{-1} \leq e^{\sin(\frac{\pi}{x})} \leq e^1 = e$.

Meer dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dat

$$\frac{1}{e} \sqrt{x^2+x^3} \leq \sqrt{x^2+x^3} \cdot e^{\sin(\frac{\pi}{x})} \leq \sqrt{x^2+x^3} \cdot e$$

Omdat $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+x^3} = 0$ volgt er uit de u-sluitstelling dus dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+x^3} \cdot e^{\sin(\frac{\pi}{x})} = 0.$$

(2) We moeten aantonen, dat voor elke $\varepsilon > 0$ er een reëel getal $N > -1$ bestaat, zodat als $x > N$ er geldt dat

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Laat $\varepsilon > 0$ willekeurig, en kies $N = \frac{2}{\varepsilon}$.
 Dan geldt er voor alle $x > N$ dat

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{(x-1) - (x+1)}{x+1} \right| = \left| \frac{-2}{x+1} \right| < \frac{2}{x} < \varepsilon$$



(3) (a) Voor $x \geq 0$ is $f(x) = \frac{x \cdot e^{\cos(x^2)}}{\sqrt{x+2}}$. Dan

$$f'(x) = \frac{(x \cdot e^{\cos(x^2)})' \cdot \sqrt{x+2} - (\sqrt{x+2})' \cdot x \cdot e^{\cos(x^2)}}{(\sqrt{x+2})^2}$$

$$= \frac{(e^{\cos(x^2)} + x \cdot (-2\sin(x^2) \cdot x) e^{\cos(x^2)}) \sqrt{x+2} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \cdot x e^{\cos(x^2)}}{x+2}$$

$$= \frac{(1 - 2x^2 \sin(x^2)) e^{\cos(x^2)} \sqrt{x+2} - \frac{x e^{\cos(x^2)}}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

Zou je nog verder kunnen vereenvoudigen.

(3b) Er is gegeven, dat f en g differentieerbaar zijn in $x=c$, dus dat de limieten

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ en } \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

(bestaan en eenduidig zijn. We schrijven dan

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = g'(c)$$

Maar dan geldt er dat

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{(fg)(x) - (fg)(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(c) + f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)g(x) - f(x)g(c)}{x - c} + \frac{f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x - c} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \left(f(x) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(c) \right)$$

Mer op, dat

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = f(c) \cdot g'(c)$$

(omdat f continue is in $x=c$, en g differentieerbaar)

$$\text{en } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(c) = f'(c) \cdot g(c)$$

Tezamen vinden we

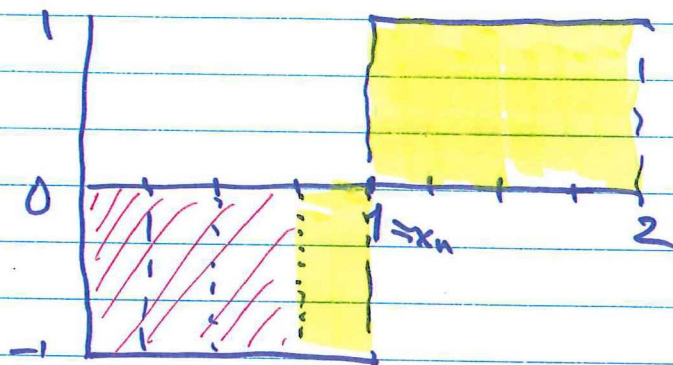
$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{(fg)(x) - (fg)(c)}{x - c} = f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c)$$

④ Laat $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ +1, & \text{als } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Kies als partitie P_n van $[0,2]$:

$$P_{2n} = \{x_0=0, x_1=\frac{1}{n}, \dots, x_n=1, x_{n+1}=1+\frac{1}{n}, x_{n+2}=1+\frac{2}{n}, \dots, x_{2n}=2\}$$



Quadt $M_n = +1$ en $m_n = -1$ (en voor alle andere i 's geldt dat $M_i = m_i = -1$ als $i < n$ en $M_i = m_i = +1$ als $i > n$, zie we

$$L(f, P_n) = 0 \text{ en } U(f, P_n) = \frac{2}{n}$$

(immers: $U(f, P_n) = \text{opp gele - rode gebieden}$). Merkt dat $U(f) = \inf \{U(f, P) \mid P \text{ partitie}\} \leq \inf \{U(f, P_{2n}) \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$ en $L(f) = \sup \{L(f, P) \mid P \text{ partitie}\} \geq \sup \{L(f, P_{2n}) \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$

Quadt $L(f) \leq U(f)$ moet er dan wel gelden dat

$$U(f) = L(f) = 0,$$

en we zien dat $\int_0^2 f(x) dx = 0$



(5) De functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = |x| \cdot e^{-x^2} + 1$$

(a) Merk op, dat $f(0) = 0 + 1 = 1$, en dat

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x \cdot e^{-x^2} + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x \cdot e^{-x^2}}{x} = +1$$

en
$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-x \cdot e^{-x^2} + 1 - 1}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-x \cdot e^{-x^2}}{x} = -1$$

Dus
$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \neq 1 = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0};$$
 we zien

dat de limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

niet bestaat! De conclusie is, dat f niet differentieerbaar is in $x=0$.

(b) Als $x > 0$, dan $f(x) = x \cdot e^{-x^2} + 1$. Dus als $x > 0$ is

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 \cdot e^{-x^2} = (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2}$$

Maar dan is $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Teknoverzicht.

$$\begin{array}{c} f(x) \\ x \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

Op $(0, \infty)$ heeft f dus een maximum in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Omdat f symmetrisch is in de y -as ($f(x) = f(-x)$, f is EVEN) volgt dat f ook een maximum heeft in $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

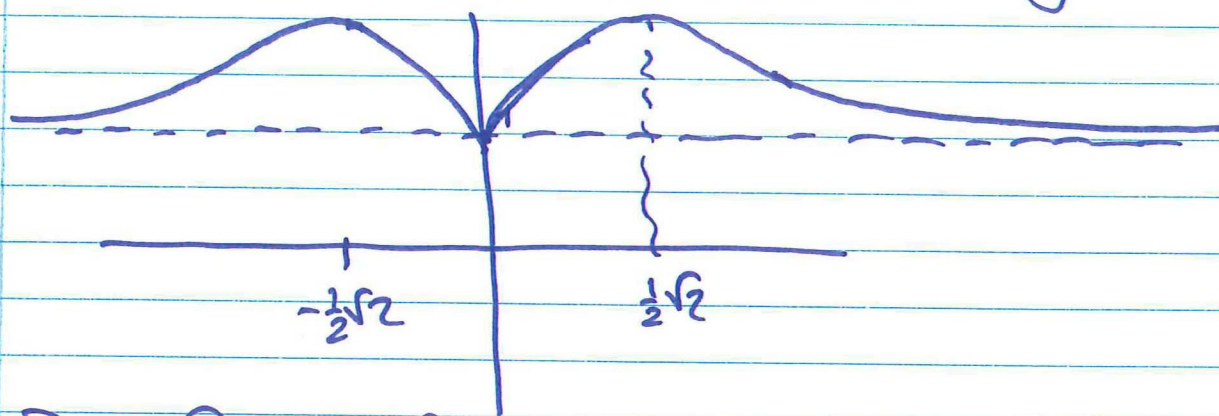
Omdat $|x| \cdot e^{-x^2} + 1 > 1$ als $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zien we dat f in $x=0$ dus een minimum heeft (vz $f(0) = 1$).

Als $x \rightarrow \pm\infty$ geldt er, dat

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 + 1 = 1$$

dus $y=1$ is een horizontale asymptoot.

(5c) Alle informatie van f uit (5b) krijgen:



De functie f is symmetrisch in de Y -as
(dus ook: $f(x) = f(-x)$).

(6a) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx$ Zet $u = 1+\sqrt{x}$, dan is

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(u-1)}$$

Dan is $dx = 2u \, du$, en volgt er (bedenk: $u = 1+\sqrt{x}$)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx &= \int 2(u-1)\sqrt{u} \, du \\ &= \int (2u\sqrt{u} - 2\sqrt{u}) \, du = \int (2u^{3/2} - 2u^{1/2}) \, du \\ &= 2 \cdot \frac{2}{5} u^{5/2} - 2 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{5} (1+\sqrt{x})^2 \sqrt{1+\sqrt{x}} - \frac{4}{3} (1+\sqrt{x}) \sqrt{1+\sqrt{x}} + C$$

$\uparrow$
 $u = 1+\sqrt{x}$

⑥b) $\int x \cdot \arctan x \, dx$

Bedenk, dat $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$; dus, toepassen van partiële int.:

$$\int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\arctan x}_{F(x)} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

Apart: $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx = x - \arctan x$$

Dus invullen geeft:

$$\int x \cdot \arctan x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

⑦ De gammafunctie $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt, \quad x > 0.$$

⑧ $\Gamma(x)$ is convergent voor alle $x > 0$. Immers:

Beschouw eerst $\int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt$. Als $x \geq 1$ dan is dit direct duidelijk: in dat geval is

$$0 \leq t^{x-1} \cdot e^{-t} \leq e^{-t} \quad \text{voor alle } t \in [0, 1], \text{ dus}$$

$$\text{is } 0 \leq \int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt \leq \int_0^1 e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

Versn (7a)

Als $0 < x < 1$: beschouw voor $c \in (0, 1)$:

$$\int_c^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

Als we kunnen aantonen dat $\lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ eindig is, dan is dus

$$\int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

convergent.

Merkp, dat

$$\int_c^1 \underbrace{t^{x-1}}_{g(t)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{F(t)} dt = \left[\frac{1}{x} \cdot t^x \cdot e^{-t} \right]_c^1 +$$

$$- \int_c^1 \frac{1}{x} \cdot t^x \cdot (-e^{-t}) dt$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e} - \frac{1}{x} \cdot c^x \cdot e^{-c} + \frac{1}{x} \underbrace{\int_c^1 t^x \cdot e^{-t} dt}_{\text{conv. omdat } x > 0}$$

Dus $\int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ conv.

Beschouw nu

$$\int_1^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$

Bedenk dat voor $t \geq 1$ er geldt, dat

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \geq \frac{t^n}{n!}, \text{ voor elke } n \in \mathbb{N}$$

Verdoly (7a)

Dus $t^{x-1} \cdot e^{-t} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \leq n! \frac{t^{x-1}}{t^n} = n! \frac{1}{t^{n+1-x}}$

Kies nu $n \geq 0$, dat $n+1-x > 1$, dan is

$$\int_1^c \frac{dt}{t^{n+1-x}} = \left[\frac{-1}{n-x} \cdot t^{(n-x)} \right]_1^c$$

$$= \frac{-1}{n-x} \left(\frac{1}{c^{n-x}} - 1 \right)$$

$\longrightarrow \frac{1}{n-x}$ als $c \rightarrow \infty$

Dus wegens het majoranten-minorante kenmerk is dan

$$0 \leq \int_1^c t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \leq n! \int_1^c \frac{dt}{t^{n+1-x}} \xrightarrow{\text{als } c \rightarrow \infty} \frac{n!}{n-x}$$

als $n+1-x > 1$

Tenzamen zien we dat de integraal convergeert is.

(7b) $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \underbrace{t^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{g(x)} dt$ partiële integratie

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\left[t^x \cdot (-e^{-t}) \right]_0^c - \int_0^c x \cdot t^{x-1} \cdot (-e^{-t}) dt \right)$$

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} (-c^x \cdot e^{-c}) + x \int_0^c t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$= 0 + x \Gamma(x)$$

-g- [K]

(7c) Deze opgave volgt direct uit (7b) m.b.v. volledige inductie.

(i) Voor $n=0$ is de uitspraak waar/juist/correct, omdat

$$\begin{aligned}\Gamma(0+1) &= \Gamma(1) = \int_0^1 t^0 \cdot e^{-t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-t} dt \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^c} \right) \\ &= 1 \stackrel{\text{per def.}}{=} 0!\end{aligned}$$

(ii) Inductie-hypothese: Laat de uitspraak waar/juist/correct zijn voor de een-of-andere $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma(n+1) = n!$

We weten dan aantekend dat zij correct is voor $n+1$ (dus dat $\Gamma(n+2) = (n+1)!$)

Welnu, wegens (7b) geldt $\forall$ voor alle $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

$$\begin{aligned}\text{Dus } \Gamma(n+2) &= (n+1) \Gamma(n+1) \stackrel{\text{wegens de Ind. hyp.}}{=} \\ &= (n+1) \cdot n! \\ &= (n+1)!\end{aligned}$$

Uit (i) & (ii) volgt dan de bewering voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

□

⑧

Gegeve is, dat voor $-1 < t < +1$ er geldt:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad (*)$$

Dus als $|x| < 1$ geldt er

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt \stackrel{\text{st.}}{=} \underline{\underline{\quad}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Vanzelfsprekend is

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

Uit (*) volgt ook, dat als $-1 < t < 1$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n$$

dus op analoge wijze dat

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

Maar dan, als $|x| < 1$:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

□

alle onone termen vallen tegen elkaar weg. -11-

⑨ Gegeven is voor $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{voor } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{voor } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{zodat } e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \quad \text{voor } x \in \mathbb{R}$$

Verder is

$$f(x) = (\sin x) \cdot e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Vraag is: wat zijn de eerste drie c_n -waarden ongeveer van $f(x)$?

Manier 1 ("op z'n Jan Boer (nuttigste)")

$$\begin{aligned} (\sin x) \cdot e^{x^2} &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots \right) \\ &= x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= 1 \cdot x + \left(1 - \frac{1}{6} \right) x^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \right) x^5 + \dots \\ &= 1 \cdot x + \frac{5}{6} x^3 + \frac{41}{120} x^5 + \dots \end{aligned}$$

Dus $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = \frac{5}{6}, c_4 = 0, c_5 = \frac{41}{120}, \dots$

Manier 2: Zet $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (dus $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{6}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{120}, \dots$) en $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ (dus $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = 0, b_4 = \frac{1}{24}, b_5 = 0, \dots$)

Dan is

$$c_0 = a_0 b_0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$c_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = 0 \cdot \frac{1}{24} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$