

Toets Analyse 1 (TW1040)
Vrijdag 19 december 2014; 09h00 – 10h00

*Het gebruik van een boek of aantekeningen is bij deze toets **niet** toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine wel.*

Ieder onderdeel van elke vraag heeft hetzelfde gewicht (i.e. is dus evenveel punten waard). Elke vraag is 2 punten waard. Het cijfer van deze toets wordt bepaald door: (aantal punten) $\times 0.9 + 1$.

1. Ga na of de volgende limieten bestaan, en wat de waarde is. Geef duidelijk aan hoe u aan uw resultaat komt. Als de limiet niet bestaat, geef dan duidelijk aan waarom niet.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \right).$

2. Gebruik de formele definitie van limiet (dus met ε 's en δ 's) om aan te tonen dat:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \sin x = 0.$$

3. Voor een functie $f : [1, 3] \rightarrow [0, \infty)$ is gegeven dat $f(2) = 2$ en $f'(2) = 3$. Verder is de functie $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$g(x) = \sqrt{\frac{xf(x)}{x^2 + f(x)}}.$$

Gebruik dan de rekenregels voor afgeleiden om $g'(2)$ te bepalen.

4. Zij $M \in \mathbb{R}$ en laat f een continue functie zijn op $[0, 1]$, die differentieerbaar is op $(0, 1)$. Zij verder gegeven dat $f(0) = 0$ en $f'(x) \leq M$ voor alle $x \in (0, 1)$. Bewijs met behulp van de *Middelwaardstelling*¹ dat voor alle $x \in [0, 1]$ er geldt dat $f(x) \leq Mx$.

5. Maak de volgende definitie af:

Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn, en laat $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ een partitie zijn van $[a, b]$. Voor elke $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ definiëren we

$$M_i(f) = \dots \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{en} \quad m_i(f) = \dots \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Zet $\Delta x_i = \dots$ voor $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dan definiëren we de *bovensom* $U(f, P)$ van f met betrekking tot P respectievelijk de *ondersom* $L(f, P)$ van f met betrekking tot P als

$$U(f, P) = \dots \quad \text{respectievelijk} \quad L(f, P) = \dots$$

De *bovenintegraal* $U(f)$ van f op $[a, b]$ is dan gedefinieerd als

$$U(f) = \dots$$

en de *onderintegraal* $L(f)$ van f op $[a, b]$ is dan gedefinieerd als

$$L(f) = \dots$$

Dan is f (Riemann) integreerbaar op $[a, b]$ als $\dots$

Einde.

¹Geef duidelijk in uw antwoord aan hoe u de Middelwaardstelling gebruikt.