

Antwoorden Toets Analyse 1, 19 december 2014 (TW1040)

1. (a) Gebruik de *Regel van l'Hôpital* enkele malen (we hebben steeds type $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

- (b) Maak eerst de noemers gelijk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{(x-1) - (x+1)}{x^2 - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= -2. \end{aligned}$$

2. Gebruik de formele definitie van limiet (dus met ε 's en δ 's) om aan te tonen dat:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \sin x = 0.$$

Immers, omdat $-1 \leq \sin x \leq 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, en dus zeker voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, zien we dat $|\sin x| \leq 1$ voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Laat nu $\varepsilon > 0$ willekeurig en kies dan $\delta = \varepsilon$. Dan geldt er voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $0 < |x-2| < \delta$ dat

$$|(x-2) \sin x - 0| = |(x-2) \sin x| = |x-2| |\sin x| < \delta \times 1 = \delta = \varepsilon,$$

en dat is precies wat we moesten aantonen! □

3. Voor een functie $f : [1, 3] \rightarrow [0, \infty)$ is gegeven dat $f(2) = 2$ en $f'(2) = 3$. Verder is de functie $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$g(x) = \sqrt{\frac{xf(x)}{x^2 + f(x)}}.$$

Merk op, dat we $g(x)$ ook kunnen schrijven als:

$$g(x) = \left(\frac{xf(x)}{x^2 + f(x)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Maar dan kunnen we $g'(x)$ bepalen door eerst de kettingregel te gebruiken, en “daarin” de quotientregel, en tussendoor ook de productregel:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{xf(x)}{x^2 + f(x)} \right)^{\frac{1}{2}-1} \times \left(\frac{xf(x)}{x^2 + f(x)} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{xf(x)}{x^2 + f(x)} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{(f(x) + xf'(x))(x^2 + f(x)) - (2x + f'(x))(xf(x))}{(x^2 + f(x))^2}. \end{aligned}$$

Dit zou je wat kunnen “opknappen,” maar omdat we alleen maar $g'(2)$ willen weten kunnen we ook direct $x = 2$ invullen (en gebruiken dat gegeven is dat $f(2) = 2$ en $f'(2) = 3$):

$$\begin{aligned} g'(2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2f(2)}{2^2 + f(2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{(f(2) + 2f'(2))(2^2 + f(2)) - (2 \times 2 + 3)(2f(2))}{(2^2 + f(2))^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{6} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{(2 + 6)(6) - (7)(4)}{36} \\ &= \frac{5}{36} \sqrt{6}. \end{aligned}$$

4. Zij $M \in \mathbb{R}$ en laat f een continue functie zijn op $[0, 1]$, die differentieerbaar is op $(0, 1)$. Zij verder gegeven dat $f(0) = 0$ en $f'(x) \leq M$ voor alle $x \in (0, 1)$. Bewijs met behulp van de *Middelwaardstelling* dat voor alle $x \in [0, 1]$ er geldt dat $f(x) \leq Mx$.

Bewijs. Merk eerst op, dat voor $x = 0$ de uitspraak juist/waar/correct is: $f(0) = 0$ (dat is gegeven) en $M \times 0 = 0$, dus inderdaad $f(0) = 0 \leq 0 = M \times 0$. We mogen dus aannemen dat $x \in (0, 1]$. Uit het gegeven volgt dan, dat f continu is op $[0, x]$, en differentieerbaar op $(0, x)$, dus wegens de *Middelwaardstelling* (toegepast met $a = 0$ en $b = x$; de eindpunten van het interval waarom f gedefinieerd is) bestaat er een $c \in (0, x)$ met

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c).$$

Omdat er tevens gegeven is dat $f'(x) \leq M$ voor alle $x \in (0, 1)$, en er dus zeker geldt dat $f'(c) \leq M$, vinden we dus, dat

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c) \leq M.$$

Omdat $x \in (0, 1]$ (en dus positief is), geeft kruislings vemenigvuldigen dat:

$$f(x) \leq Mx,$$

voor $x \in (0, 1]$. Omdat we al bewezen hadden dat $f(0) \leq M \times 0$, volgt de uitspraak dus voor alle $x \in [0, 1]$. $\square$

5. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn, en laat $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ een partitie zijn van $[a, b]$. Voor elke $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ definiëren we

$$M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{en} \quad m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Zet $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ voor $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dan definiëren we de *bovensom* $U(f, P)$ van f met betrekking tot P respectievelijk de *ondersom* $L(f, P)$ van f met betrekking tot P als

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta x_i \quad \text{respectievelijk} \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta x_i.$$

De *bovenintegraal* $U(f)$ van f op $[a, b]$ is dan gedefinieerd als

$$U(f) = \inf\{U(f, P) : P \text{ is een partitie van } [a, b]\}$$

en de *onderintegraal* $L(f)$ van f op $[a, b]$ is dan gedefinieerd als

$$L(f) = \sup\{L(f, P) : P \text{ is een partitie van } [a, b]\}.$$

Dan is f (Riemann) integreerbaar op $[a, b]$ als $U(f) = L(f)$.

Einde.