Tentamen Algebra 1
Donderdag 29 juni 2017, 10:00 – 13:00

- Bij dit tentamen mag het dictaat "Algebra 1" van Peter Stevenhagen gebruikt worden, maar geen uitwerkingen van opgaven en geen rekenmachines of andere elektronische hulpmiddelen. Eventuele onderstrepingen, markering of korte hoorcollege-notities in het dictaat zijn geen probleem, zolang het geen (gedeeltes van) werkcollege-notities of uitwerkingen van opgaven of oude tentamens zijn.
- Je mag opgaven 2.46, 2.49, 4.10, 5.2 en 8.13 gebruiken zonder ze op te lossen.
- De punten per opgave staan in de kantlijn. Het tentamencijfer is aantal punten $\times 9/39 + 1$.
- Benoem de resultaten die je gebruikt. Bewijs altijd je antwoord, tenzij expliciet in de opgave staat dat het niet hoeft.

Opgave 1. Voor elk van de volgende gevallen, geef *alle* gehele getallen x die voldoen aan

(a) $((123)(4567))^x = (123)(46)(57) \in S_7$, $0 \leq x < 50$; [2pt]

(b) $3^{4^{2017}} \equiv x \pmod{23}$, $0 \leq x < 23$ (waarschuwing: $a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c = a^{bc}$); [5pt]

(c) $x^2 \equiv x \pmod{1115111}$, $0 \leq x < 1115111$ [3pt]
(je mag de priemfactorisatie $1115111 = 1051 \cdot 1061$ gebruiken).

Opgave 2. Geef *zonder bewijs* voor elk van de volgende werkingen aan of deze [6pt]

(A) transitief is,

(B) trouw is,

(C) dekpuntsvrij is.

Er worden dus $3 \times 4 = 12$ antwoorden ("ja"/"nee") verwacht in een overzichtelijke tabel. Je zou ze allemaal moeten kunnen bewijzen, maar zo niet: gokken loont! Naar het bewijs wordt niet gekeken.

(i) De werking van $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ op $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ gegeven door $(a, b)(x, y) = (ax, by)$.

(ii) De werking van D_4 op de verzameling van diagonalen van een vierkant.

(iii) De werking van $\mathbf{Z}$ op $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ gegeven door $k \circ (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a + k}, \overline{b + k})$.

(iv) Voor $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de voordehandliggende werking van S_4 op X. Dat wil zeggen, de werking $S_4 \times X \to X : (\sigma, x) \mapsto \sigma \circ x$ die voor $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ voldoet aan $\sigma \circ x = \sigma(x)$.

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 3.

(a) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(C_2, S_4)$. [2pt]

(b) Laat zien: $\#\mathrm{Hom}(D_7, S_4) = \#\mathrm{Hom}(C_2, S_4)$. [2pt]

Beschouw de ondergroep

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*, b \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}) \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}).$$

(c) Laat zien: [2pt]

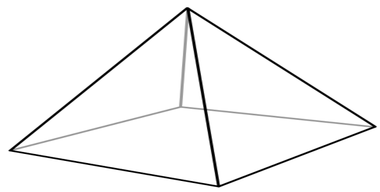
$$[G, G] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}). \right\}$$

(d) Laat zien: $G^{\mathrm{ab}} \cong (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$. [1pt]

(e) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(G, C_3)$. [2pt]

(f) Bepaal het centrum van G. [1pt]

Opgave 4. Zij P een pyramide met vierkant grondvlak en vier gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken. Een *Pyramide van Les Orres* is een exemplaar van P waarbij elke ribbe groen, blauw, rood of zwart gekleurd is. We noemen twee Pyramides van Les Orres 'hetzelfde' als ze door rotatie in elkaar overgevoerd kunnen worden. Bepaal het aantal echt verschillende Pyramides van Les Orres. [5pt]
Je mag je antwoord laten staan in de vorm van een formule zoals "$6^3 + 5^7$".



Opgave 5. Zij p een priemgetal en laat $X \subset S_p$ de verzameling p-cykels zijn.

(a) Laat zien dat X precies $(p-1)!$ elementen heeft. [1pt]

Beschouw de p-cykel $\sigma = (1\ 2\ 3\ \cdots\ p) \in S_p$ en de cyclische ondergroep $H = \langle \sigma \rangle \subset S_p$.

(b) Laat zien dat de groep H door conjugatie werkt op X. [1pt]

(c) Laat zien dat deze werking precies $p-1$ vaste punten heeft. [2pt]

(d) Laat zien dat alle banen voor deze werking lengte 1 of p hebben. [1pt]

(e) Laat zien: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. [1pt]

(f) (Ongerelateerd aan (a)–(e).) Nu voor $p = 2017$: is de normalisator van H in S_{2017} gelijk aan de normalisator van σ in S_{2017}? [2pt]

Veel succes!
Je bent van harte welkom bij de evaluatielunch na afloop van het tentamen in zaal 407-409.
Cijfers staan waarschijnlijk maandagavond op de Leidse Blackboardpagina.