Antwoorden tentamen Algebra 1
Donderdag 29 juni 2017, 10:00 – 13:00

- Bij dit tentamen mag het dictaat "Algebra 1" van Peter Stevenhagen gebruikt worden, maar geen uitwerkingen van opgaven en geen rekenmachines of andere elektronische hulpmiddelen. Eventuele onderstrepingen, markering of korte hoorcollege-notities in het dictaat zijn geen probleem, zolang het geen (gedeeltes van) werkcollege-notities of uitwerkingen van opgaven of oude tentamens zijn.
- Je mag opgaven 2.46, 2.49, 4.10, 5.2 en 8.13 gebruiken zonder ze op te lossen.
- De punten per opgave staan in de kantlijn. Het tentamencijfer is aantal punten $\times 9/39 + 1$.
- Benoem de resultaten die je gebruikt. Bewijs altijd je antwoord, tenzij expliciet in de opgave staat dat het niet hoeft.

Algemene opmerkingen over de antwoorden:

- Hieronder staan niet altijd volledige uitwerkingen.
- Boven het tentamen stond al "Benoem de resultaten die je gebruikt." Dat gebeurde lang niet altijd. Noem de naam of het nummer van de stelling, of citeer de hele stelling.
- Boven het tentamen staat ook "Bewijs altijd je antwoord,ën daarbij hoort ook
  - het controleren dat aan voorwaarden van stellingen is voldaan, en
  - het aangeven op welke groepen/werkingen/... je de stelling toepast.
- Zoals in de kantlijn al te lezen was, zijn de opgaven het volgende aantal punten waard.

1	2	3	4	5
10	6	10	5	8

  Je aantal behaalde punten per opgave staat in blackboard.

Opgave 1. Voor elk van de volgende gevallen, geef *alle* gehele getallen x die voldoen aan

(a) $((123)(4567))^x = (123)(46)(57) \in S_7$, $0 \le x < 50$; [2pt]
Antwoord: 10, 22, 34, 46.

(b) $3^{4^{2017}} \equiv x \pmod{23}$, $0 \le x < 23$ (waarschuwing: $a^{b^c} = a^{(b^c)} \ne (a^b)^c = a^{bc}$); [5pt]
Antwoord: 13. Bij veelgemaakte fouten kwam er vaak toch het juiste antwoord uit. Let dus op de "algemene opmerkingen" hierboven. Vooral bij de stelling van Euler werden voorwaarden vaak niet gecontroleerd.

(c) $x^2 \equiv x \pmod{1115111}$, $0 \le x < 1115111$ [3pt]
(je mag de priemfactorisatie $1115111 = 1051 \cdot 1061$ gebruiken).
Antwoord: 0, 1, 111406, 1003706.
De Chinese reststelling zegt dat (x mod 1115111) een oplossing is precies als (x mod 1051) en (x mod 1061) oplossingen zijn.

Bekijk nu $\overline{x} \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. We gaan laten zien dat geldt $\overline{x}^2 = \overline{x}$ precies als $\overline{x} \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Stel $\overline{x}^2 = \overline{x}$. Omdat p een priemgetal is, is $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ een lichaam, dus geldt $\overline{x} = \overline{0}$ of $\overline{x} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. In het tweede geval is er een inverse en als we daarmee vermenigvuldigen, dan krijgen we $\overline{x} = \overline{1}$. Andersom zijn $\overline{0}$ en $\overline{1}$ inderdaad oplossingen.

We hebben nu $2 \times 2 = 4$ oplossingen in $(\mathbf{Z}/1051\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/1061\mathbf{Z})$ en daar horen, volgens de Chinese reststelling dus precies 4 oplossingen in $(\mathbf{Z}/1115111\mathbf{Z})$ bij. Die kun je uitrekenen met het standaardrecept uit het bewijs van de Chinese reststelling.

Opgave 2. Geef *zonder bewijs* voor elk van de volgende werkingen aan of deze [6pt]

(A) transitief is,

(B) trouw is,

(C) dekpuntsvrij is.

Er worden dus $3 \times 4 = 12$ antwoorden ("ja"/"nee") verwacht in een overzichtelijke tabel. Je zou ze allemaal moeten kunnen bewijzen, maar zo niet: gokken loont! Naar het bewijs wordt niet gekeken.

(i) De werking van $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ op $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ gegeven door $(a, b)(x, y) = (ax, by)$.

(ii) De werking van D_4 op de verzameling van diagonalen van een vierkant.

(iii) De werking van $\mathbf{Z}$ op $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ gegeven door $k \circ (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a+k}, \overline{b+k})$.

(iv) Voor $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de voordehandliggende werking van S_4 op X. Dat wil zeggen, de werking $S_4 \times X \to X : (\sigma, x) \mapsto \sigma \circ x$ die voor $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ voldoet aan $\sigma \circ x = \sigma(x)$.

Antwoord:

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(A)	nee	ja	ja	nee
(B)	ja	nee	nee	ja
(C)	nee	ja	ja	nee

Je krijgt 6 punten minus het aantal foute of missende antwoord.

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 3.

(a) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(C_2, S_4)$. [2pt]
Antwoord: 10 (met natuurlijk een bewijs).

(b) Laat zien: $\#\mathrm{Hom}(D_7, S_4) = \#\mathrm{Hom}(C_2, S_4)$. [2pt]
Zij $\phi \in \mathrm{Hom}(D_7, S_4)$. Merk op dat elk element $g \in C_7$ als orde een deler van 7 heeft, dus dat $\phi(g)$ voor die elementen als orde ook een deler van 7 hebben. Bewijs dan dat dergelijke elementen niet bestaan in S_4, afgezien van het triviale element. Gevolg: de kern van ϕ bevat C_7.
Met de homomorfiestelling kan je daarom een bijectie geven tussen $\mathrm{Hom}(D_7, S_4)$ en $\mathrm{Hom}(D_7/C_7, S_4)$, waarbij D_7/C_7 orde 2 heeft en dus isomorf is met C_2.

Beschouw de ondergroep

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*, b \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}) \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}).$$

(c) Laat zien: [2pt]

$$[G, G] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}). \right\}$$

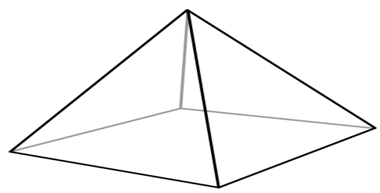
Oplossing: de commutatorondergroep wordt voortgebracht door de commutatoren. Bewijs dus dat die allemaal ook in de rechtergroep zitten. En bewijs ook de inclusie de andere kant op.

(d) Laat zien: $G^{\mathrm{ab}} \cong (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$. [1pt]
Oplossing: je zou dit kunnen doen door een homomorfisme $G \to (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$ te geven met als kern de groep uit (c).

(e) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(G, C_3)$. [2pt]
Oplossing: gebruik de abelsgemaakte groep en de homomorfiestelling (of het gevolg daarvan voor homomorfismen naar abelse groepen).
Pas op: verwar $G^{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$ niet met $[G, G]$.

(f) Bepaal het centrum van G. [1pt]
Antwoord: de triviale ondergroep (plus bewijs).

Opgave 4. Zij P een pyramide met vierkant grondvlak en vier gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken. Een *Pyramide van Les Orres* is een exemplaar van P waarbij elke ribbe groen, blauw, rood of zwart gekleurd is. We noemen twee Pyramides van Les Orres 'hetzelfde' als ze door rotatie in elkaar overgevoerd kunnen worden. Bepaal het aantal echt verschillende Pyramides van Les Orres. [5pt]
Je mag je antwoord laten staan in de vorm van een formule zoals "$6^3 + 5^7$".
Opmerkingen:



- Het antwoord is $\frac{1}{4}(4^8 + 2 \cdot 4^2 + 4^4)$.
- Geef aan welke stelling je gebruikt, en op welke groep G en verzameling X je die stelling toepast.

- De groep van ruimtelijke rotatiesymmetrieën van P is isomorf met C_4. Deze groep wordt voortgebracht door een rotatie om de as die door top en het midden van het grondvlak gaat.
- Geef aan hoe je aan het aantal vaste punten $\chi(g)$ komt voor elk element $g \in G$.

Opgave 5. Zij p een priemgetal en laat $X \subset S_p$ de verzameling p-cykels zijn.

(a) Laat zien dat X precies $(p-1)!$ elementen heeft. [1pt]
Bewijs: het getal 1 komt in elke p-cykel voor, want er komen p van de getallen $1, \ldots, p$ in voor. Zet dit getal vooraan en je krijgt een unieke schrijfwijze voor elke p-cykel. Die schrijfwijze bestaat uit een permutatie van $2, 3, \ldots, p$, en daar zijn er $(p-1)!$ van.

Beschouw de p-cykel $\sigma = (1\ 2\ 3\ \cdots\ p) \in S_p$ en de cyclische ondergroep $H = \langle \sigma \rangle \subset S_p$.

(b) Laat zien dat de groep H door conjugatie werkt op X. [1pt]
Bewijs: Elke geconjugeerde van een p-cykel is een p-cykel wegens opgave 2.46. De beperking van de conjugatiewerking $S_p \times S_p \to S_p$ geeft dus een afbeelding $H \times X \to X$. De axioma's van werkingen ((W1) en (W2) uit opgave 5.2) zijn na beperking nog steeds waar.

(c) Laat zien dat deze werking precies $p-1$ vaste punten heeft. [2pt]
Idee achter de oplossing: zoek eerst uit wat het hier precies betekent om een dekpunt te zijn. Merk dan op: $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau \Leftrightarrow \tau\sigma = \sigma\tau \Leftrightarrow \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$. En pas dan opgave 2.46 toe om te bepalen hoeveel dergelijke $\tau \in X$ er zijn.

(d) Laat zien dat alle banen voor deze werking lengte 1 of p hebben. [1pt]
Bewijs: Dit volgt direct uit de baanstabilisatorstelling voor werkingen van groepen van priemorde p.

(e) Laat zien: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. [1pt]
Bewijs: de banen vormen een partitie van de verzameling X met $(p-1)!$ elementen (a). Er zijn er $p-1$ van lengte 1 (c) en de rest heeft lengte p (d). Dus $(p-1)! \equiv p-1 \pmod{p}$.

(f) (Ongerelateerd aan (a)–(e).) Nu voor $p = 2017$: is de normalisator van H in S_{2017} gelijk aan de normalisator van σ in S_{2017}? [2pt]
Antwoord: nee.
Merk eerst op dat uit de definities volgt dat er gevraagd wordt of er een element $\tau \in S_p$ bestaat met $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^k \neq \sigma$ voor een $k \in \mathbf{Z}$. Er zijn veel voorbeeldelementen met bewijzen mogelijk.

Veel succes!
Je bent van harte welkom bij de evaluatielunch na afloop van het tentamen in zaal 407-409.
Cijfers staan waarschijnlijk maandagavond op de Leidse Blackboardpagina.