Antwoorden en opmerkingen tentamen algebra 1
Donderdag 23 juni 2016, 10:00 – 13:00
Snelliusgebouw 174 (extra tijd), B2, B3, 312 en 412

- Bij dit tentamen mag het dictaat "Algebra 1" van Peter Stevenhagen gebruikt worden, maar geen uitwerkingen van opgaven en geen rekenmachines of andere elektronische hulpmiddelen. Eventuele onderstrepingen, markering of korte hoorcollege-notities in het dictaat zijn geen probleem, zolang het geen (gedeeltes van) werkcollege-notities of uitwerkingen van opgaven of oude tentamens zijn.
- Je mag opgaven 2.46, 2.49, 4.10 en 8.13 gebruiken zonder ze op te lossen, en er geldt $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$.
- Alle opgaven zijn evenveel punten waard, niet alle deelopgaven zijn evenveel punten waard.
- Benoem de resultaten die je gebruikt. Schrijf op het tentamen of je uit Leiden of Delft komt, en schrijf er het studentnummer van je eigen universiteit op.
- Aan de oplossingen kunnen geen rechten worden ontleend. Op welke details gelet wordt, hangt af van hoe het bewijs eromheen opgeschreven is.

Opgave 1. Bepaal het gehele getal $0 \leq x \leq 74$ zó dat

$$x \equiv 23^{6^{2016}} \bmod 75.$$

Waarschuwing: $x^{y^z} = x^{(y^z)} \neq (x^y)^z = x^{y \cdot z}$.

Opmerkingen.

- Het correcte antwoord is 61.
- De meestgemaakte fout: het niet controleren of aan de voorwaarden van een stelling (Euler of Chinese reststelling) is voldaan.
- Denk na over wat je beweert: als je weet wat een getal is modulo 5 en je weet ook wat het getal is modulo 5, ligt dan vast welk getal het is modulo 25?
- $\varphi(75) = \varphi(3) \cdot \varphi(5^2) = (3-1) \cdot (5-1)5 = 40$.
- Sommige fouten maken de opgave erg makkelijk, voor die fouten is tot wel 8 punten afgetrokken.

Opgave 2. Bepaal voor elk van de volgende drie situaties of de twee elementen geconjugeerd zijn in de gegeven groep.

(a) $(364)(567)(246)$ en $(456)(467)(253)$ in S_7;

(b) $(12)(34)$ en $(13)(24)$ in A_4;

(c) 3 en 7 in $\mathbf{R}^*$.

Uitwerking. Elk van de deelopgaven is 3 punten waard.

(a) Nee, $(364)(567)(246) = (236)(475)$ en $(456)(467)(253) = (267532)$ hebben niet hetzelfde cykeltype en zijn dus niet geconjugeerd in S_7;

(b) Ja, $(234)(12)(34)(234)^{-1} = (13)(42) = (13)(24)$ wegens opgave 2.46, en $(234) \in A_4$, dus de elementen zijn geconjugeerd in A_4.

   – Alleen opmerken dat ze hetzelfde cykeltype hebben is niet voldoende. Zo zijn er 8 driecykels in A_4, en die kunnen niet allemaal geconjugeerd zijn, want 8 is geen deler van $12 = \#A_4$.
   – Alleen opmerken dat geldt $(23)(12)(34)(23)^{-1} = (13)(24)$ is niet voldoende, want (23) is geen element van A_4.

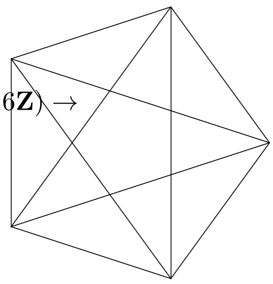
(c) Nee, want $\mathbf{R}^*$ is abels en $3 \neq 7$.

Opgave 3.

(a) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/2016\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2016\mathbf{Z})$.

(b) Hoeveel van de homomorfismen in (a) zijn injectief?

(c) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(D_{23}, C_6)$.



Oplossing. Elke deelopgave is 3 punten waard.

(a) Antwoord: 2016. Bewijs: De afbeelding $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/2016\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2016\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}/2016\mathbf{Z} : f \mapsto f(\overline{1})$ heeft als inverse $\overline{k} \mapsto (\overline{l} \mapsto \overline{kl})$ (plus controle!) en is dus een bijectie.

(b) Antwoord: $\varphi(2016) = 2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6$. Bewijs: Gebruik de bijectie van deel (a). De afbeelding $(\overline{l} \mapsto \overline{kl})$ is injectief dan en slechts dan als de kern triviaal is, dus precies als de implicatie $2016 \mid kl \Rightarrow 2016 \mid l$ geldt, dus precies als k copriem is met 2016.

(c) Antwoord: 2. Bewijs: Elk homomorfisme van D_{23} naar een abelse groep factoriseert op unieke wijze via de abelsgemaakte groep wegens de homomorfiestelling. Dit geeft $\#\mathrm{Hom}(D_{23}, C_6) = \#\mathrm{Hom}(D_{23}^{\mathrm{ab}}, C_6)$.

Opgave 8.13 geeft $D_{23}^{\mathrm{ab}} \cong C_2$.

Een homomorfisme van C_2 naar C_6 wordt gegeven door het beeld van het element van orde 2, en dat is het element van C_6 van orde 2 of het element van orde 1. In beide gevallen is eenvoudig te controleren dat het echt homomorfismen zijn.

Opgave 4. De symmetriegroep D_5 van de regelmatige 5-hoek werkt op de verzameling verbindingslijnstukken van hoekpunten. We kleuren nu elk van deze lijnstukken, waarbij we 10 kleuren tot onze beschikking hebben. Dat kan dus op 10^{10} manieren, waarvan er vele equivalent zijn. Op hoeveel niet-equivalente manieren kan het?
(Twee kleuringen noemen we equivalent als een element van D_5 de ene in de andere overvoert.)

Opmerkingen

- Het antwoord is 1000500040.
- Noem de stelling die je gebruikt en zeg waarop je de stelling toepast.
- Leg uit hoe je aan getallen als 10^6 komt en wat deze getallen voorstellen.

Opgave 5. Een werking van een groep G op een verzameling X heet *vrij* als voor alle $x \in X$ de stabilisator G_x triviaal is (dat wil zeggen, gelijk is aan de triviale ondergroep van G).

(a) Geef *zonder bewijs* voor elk van de volgende werkingen aan of deze

(A) transitief is,
(B) trouw is,
(C) dekpuntsvrij is,
(D) vrij is.

Er worden dus $4 \times 3 = 12$ antwoorden ("ja"/"nee") verwacht in een overzichtelijke tabel. Je zou ze allemaal moeten kunnen bewijzen, maar zo niet: gokken loont! Naar het bewijs wordt niet gekeken.

(i) De werking van D_4 op de verzameling hoekpunten van een vierkant.
(ii) De werking van de additieve groep $\mathbf{R}$ op het vlak $\mathbf{R}^2$ gegeven door $a \circ (x, y) = (a + x, y)$.
(iii) De werking van C_6 op de verzameling D van de drie diagonalen van een regelmatige zeshoek.

(b) Bewijs dat als een eindige groep G vrij en transitief op X werkt, dat dan geldt $\#G = \#X$.

Oplossing

(i) Deze deelopgave is 6 punten waard. Elk fout, missend, of niet leesbaar antwoord kost 1 punt.

	A	B	C	D
i	ja	ja	ja	nee
ii	nee	ja	ja	ja
iii	ja	nee	ja	nee

(ii) De werking is transitief, dus er is een x met $Gx = X$. Neem zo'n x en pas er de baan-stabilisatorstelling 5.3 op toe: $\#G = \#G_x \cdot \#Gx = 1 \cdot \#X$, waarbij $\#G_x = 1$ volgt uit de definitie van "vrij".

Opgave 6. Zij p een priemgetal. Op een veld staan $2p$ kabouters verdeeld over twee kringen van p kabouters. We hebben ook p blauwe en p rode mutsen. Zij X de verzameling van de manieren waarop we deze mutsen over de kabouters kunnen verdelen. We laten $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$ als volgt werken op X: het element $(a, b) \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$ laat de kabouters in de linker kring hun muts a keer doorgeven met de klok mee, en laat de kabouters in de rechter kring hun muts b keer doorgeven met de klok mee.
Je mag zonder bewijs gebruiken dat dit een werking is.

(a) Bewijs dat er precies twee dekpunten zijn voor de werking van G op X.

(b) Laat zien dat alle andere banen precies lengte p^2 hebben.

(c) Bewijs $\#X = \binom{2p}{p} \equiv 2 \bmod p^2$.

Ter herinnering: $\binom{m}{n}$ is het aantal deelverzamelingen van n elementen binnen een verzameling van m elementen.

Oplossing.

(a) Zij $x \in X$ een dekpunt. Als alle kabouters in de linker kring hun muts doorgeven, dan verandert de verdeling x van de mutsen niet. Alle kabouters in de linkerkring hebben dus dezelfde kleur. Daarmee zijn de mutsen in die kleur op, en de kabouters in de rechterkring hebben dus de andere kleur.

Andersom geldt dat als je alle kabouters in de linker kring dezelfde kleur geeft, en alle kabouters in de rechter kring de andere kleur, dat de verdeling van de mutsen dan niet verandert bij het doorgeven van mutsen, en dat zo'n verdeling dus een vast punt is.

(b) Zij $x \in X$ een verdeling die geen dekpunt is. We laten zien dat de stabilisator triviaal is. Uit de baanstabilisatorstelling 5.3 volgt dan dat de baan lengte p^2 heeft.

Zij $(a, b) \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$ een element van de stabilisator. Dan zit ook $(a, 0)$ in de stabilisator. Het element $a \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ heeft orde 1 of p. Als a orde p heeft, dan heeft de hele linkerkring dezelfde kleur, en dan zijn we terug bij een van de vaste punten van (a). Dus a heeft orde 1, oftewel $a = \overline{0}$. Zo ook $b = \overline{0}$, dus de stabilisator is triviaal.

(c) $\#X$ is het aantal manieren om p kabouters uit $2p$ te kiezen om een blauwe muts te geven, dus $\binom{2p}{p}$. De banen vormen een partitie van X, dus uit (a) en (b) volgt $\#X = 2 + np^2$, waarbij n het aantal banen is met lengte > 1.