

Tentamen Inleiding Kansrekening TW1080.

3 juli 2017, 9:00-12:00

- Het tentamen bestaat uit 1 theorievraag (op 10 punten), gevolgd door 15 opgave-onderdelen. Met elk van deze laatste onderdelen kan maximaal 2 punten verdiend worden. In totaal kunnen dus maximaal 40 punten verdiend worden.
 - Het eindcijfer x wordt berekend als een gewogen gemiddelde van het deeltentamencijfer y en het tentamencijfer z , via $x = y(4/10) + z(6/10)$, zoals uitgelegd is op blackboard.
 - De tweede lezer van dit tentamen is Dr. Joris Bierkens.
-

1. **Theorievraag.** Geef en bewijs de zwakke wet van de grote aantallen. Bewijs hierbij ook de ongelijkheden die u gebruikt.
2. De grootte (uitgebrande oppervlakte) van bosbranden in een bepaalde regio in Canada wordt gemodelleerd door een continue stochast X met een zgn. Pareto verdeling. Er geldt

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} & \text{indien } x \geq 1, \\ 1 & \text{indien } x < 1. \end{cases} \quad (1)$$

- a) Bereken de kansdichtheid van X .
 - b) Bereken de verwachting en variantie van X .
 - c) Toon aan dat de conditionele kans $\mathbb{P}(X \geq 2x | X \geq x)$ voor $x > 1$ niet van x afhangt. We noemen deze eigenschap schaal-invariantie.
 - d) Zij Y exponentieel verdeeld met parameter 1. Bepaal de unieke waarde van α zodanig dat $e^{\alpha Y}$ dezelfde verdeling heeft als X .
 - e) Zij U uniform verdeeld op $[0, 1]$. Voor welke functie $\varphi : [0, 1] \rightarrow [1, \infty)$ is $\varphi(U)$ verdeeld zoals X ?
3. De totale premie die een verzekeringsmaatschappij van een klant ontvangt kan gemodelleerd worden door een som

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

met X_i onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter $\lambda > 0$, en N onafhankelijk van alle X_i en geometrisch verdeeld met parameter $p \in (0, 1)$. De stochast N modelleert hierbij het aantal jaren dat de klant bij de betreffende verzekeringsmaatschappij verzekerd is. U mag in deze opgave gebruiken dat de momentgenererende functie van een exponentieel verdeelde stochast gegeven wordt door

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

voor $t < \lambda$, en dat de kansgenererende functie van een geometrisch verdeelde stochast gegeven wordt door

$$G_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbb{P}(N = n) = \frac{pz}{1 - (1-p)z}$$

voor $z < \frac{1}{1-p}$. Verder mag u gebruiken dat voor een exponentieel verdeelde stochast geldt $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, en voor een geometrisch verdeelde stochast $\mathbb{E}(N) = 1/p$.

a) Toon aan dat

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{p\lambda}$$

b) Toon aan dat voor de momentgenererende functie van S geldt

$$M_S(t) = G_N(M_X(t))$$

c) Bereken met behulp van onderdeel b) de momentgenererende functie van S en besluit hieruit wat de verdeling van S is.

4. $X_i, i \in \mathbb{N}$ is een rij stochasten waarvoor geldt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_i) &= 2^{-i}, \quad i = 1, 2, \dots \\ \text{Var}(X_i) &= 4, \quad i = 1, 2, \dots \\ \text{cov}(X_i, X_{i+1}) &= 1, \quad i = 1, 2, \dots \\ \text{cov}(X_i, X_j) &= 0, \quad |i - j| > 1 \end{aligned}$$

a) Bereken $\mathbb{E}((X_1 + X_2)^2)$.

b) Toon aan dat voor de momentgenererende functie van $X_1 + X_2$ geldt dat

$$M_{X_1+X_2}(t) \geq e^{\frac{3t}{4}}$$

- c) Toon aan dat er een positieve constante c bestaat zodanig dat voor alle $n = 1, 2, \dots$ geldt dat

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \leq cn$$

- d) Toon aan, gebruik makend van onderdeel c) dat

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

in kans naar nul convergeert als $n \rightarrow \infty$.

5. Bereken benaderend het getal a zodanig dat wanneer we 72000 keer met een dobbelsteen werpen we met kans ongeveer gelijk aan 0.95 meer dan a keer zes werpen. U mag hierbij gebruiken dat van een standaard normale stochast geldt $P(Z < -1.96) = 0.025$, $P(Z < -1.64) = 0.05$.
6. Zij de volgende uitspraken juist of fout? Beargumenteer uw antwoord.
- a) $X_i, i = 1, 2, \dots$ zijn stochasten met $\mathbb{E}(X_i) = 0, \text{Var}(X_i) = 1$. Dan geldt dat $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$ benaderend standaard normaal verdeeld is voor grote waarden van n .
 - b) Een cirkel heeft een straal die exponentieel verdeeld is met parameter 1. Dan is de oppervlakte ook exponentieel verdeeld.