2 a) $\begin{cases} \dfrac{4}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$ $\left(= -\dfrac{d}{dx} P(X \geq x) \right)$

b) $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{4x}{x^5}\, dx$

$= 4 \left. \dfrac{x^{-3}}{-3} \right|_1^\infty = \dfrac{4}{3}$

$\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{4x^2}{x^5}\, dx = 4 \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_1^\infty = \frac{4}{2} = 2$

$\mathrm{Var}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$

c) $P(X \geq 2x \mid X \geq x) = \dfrac{P(X \geq 2x \cap X \geq x)}{P(X \geq x)}$

$= \dfrac{P(X \geq 2x)}{P(X \geq x)} = \dfrac{\left(\frac{1}{2x}\right)^4}{\left(\frac{1}{x}\right)^4} = \dfrac{1}{2^4}$

is dus onafhankelijk van x.

d) Voor Y geldt, voor $y \geq 0$:

$P(Y \geq y) = e^{-y}$

$P(e^{\alpha Y} \geq y) = P\left(Y \geq \frac{\ln y}{\alpha}\right)$

$= e^{-\frac{\ln y}{\alpha}} = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}.$

e) Dit is $\varphi = F_X^{-1}$

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$$

dus $1 - \frac{1}{x^4} = y$ geeft $x = (1-y)^{-1/4}$

dus $\varphi(x) = (1-x)^{-1/4}$

3a) $\mathbb{E}(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}(S \mid N=n) \; P(N=n) \right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N=n \right) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N=n \right) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) P(N=n)$$ (omdat $N \perp X_i \; \forall i$)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \right) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} n \; P(N=n)$$ (omdat $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\lambda}$)

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n \, P(N=n) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{p}$$ (omdat $\mathbb{E}(N) = \frac{1}{p}$)

3b)

$$M_S(t) = \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{i=1}^{N} X_i} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{i=1}^{N} X_i} \Big| N=n \right) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{i=1}^{n} X_i} \Big| N=n \right) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{i=1}^{n} X_i} \right) P(N=n)$$ (omdat $N \perp e^{\sum_{i=1}^{n} X_i}, \forall n$)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}\left(e^{t X_1} \right) \right)^n P(N=n)$$ (omdat X_i onafh. en gelijk verdeeld)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(M_{X_1}(t) \right)^n P(N=n)$$

$$= G_N\left(M_{X_1}(t) \right)$$

3c)

$$G_N(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

$$G_N(M_X(t)) = \frac{p\,\frac{\lambda}{\lambda-t}}{1-(1-p)\frac{\lambda}{\lambda-t}}$$

$$= \frac{p\lambda}{1-p\lambda t}$$

is de momentgenererende functie van $\exp(p\lambda)$, dus S is $\exp(p\lambda)$ verdeeld, vanwege de uniciteitsstelling.

4a) $\mathbb{E}\left((X_1+X_2)^2\right)$

$$= \left(\mathbb{E}((X_1+X_2))\right)^2 + \mathrm{Var}(X_1+X_2)$$

$$= \left(\mathbb{E}(X_1+X_2)\right)^2 + \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\,\mathrm{cov}(X_1,X_2)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4 + 4 + 2 \times 1$$

$$= \frac{9}{16} + 4 + 4 + 2 = \frac{169}{16}$$

4b) $x \to e^{tx}$ is convex dus uit

Jensen's ongelijkheid volgt

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \geq e^{t\,\mathbb{E}(X)} = e^{t\frac{3}{4}}$$

4c) $$\mathrm{Var}\left(\sum X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{cov}(X_i, X_{i+1})$$

$$= 4n + 2(n-1) = 6n - 2 \leq 6n$$

dus $c = 6$ is een mogelijke keuze.

d) Uit Chebychev volgt, voor $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))\right| \geq \varepsilon\right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{Cn}{n^2\varepsilon^2} = 0$$

Verder geldt

$$0 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\right) = 0$$

dus, voor $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

5) Het aantal keer zes is

$X \overset{d}{=} Bin(n, p)$ met $n = 72000$, $p = \frac{1}{6}$

dit is benaderend (vanwege centrale limietstelling)

$$X \overset{d}{\approx} N(np, np(1-p)) = N(12000, 10000)$$

dus, als we kiezen a:

$$a = 12000 - 1.64\sqrt{10000}$$

$$= 12000 - 164 = 11836$$

dan

$$P(X \leq a) \simeq P\left(Z \leq \frac{a-12000}{\sqrt{10000}}\right) = P(Z \leq -1.64) = 0.05.$$

standaard normaal verdeelde stochast

dus

$$P(X \geq a) \simeq 0.95$$

6 a) Fout, neem bv alle

$X_i \simeq N(0,1)$ verdeeld

dan is $\sum X_i \simeq nN(0,1) = N(0,n^2)$

en dus is $\frac{1}{\sqrt{n}}$ is $N(0,n)$ verdeeld.

b) Fout indien X exponentieel verdeeld is, dan is $Y = \pi X^2$ niet exponentieel verdeeld, omdat

$$P(Y \geq y) = P\left(X \geq \sqrt{\frac{y}{\pi}}\right) = e^{-\lambda\sqrt{\frac{y}{\pi}}} \neq e^{-\mu y}$$

voor zekere $\mu, \forall y$.