

Deeltentamen Inleiding Kansrekening

Woensdag 24 mei 13:30-16:30 DW TZ2

- Het deeltentamen bestaat uit 15 onderdelen. Met elk van deze onderdelen kan maximaal 2 punten verdiend worden.
 - Het deeltentamen wordt met een factor 0.4 gewogen in de berekening van het eindcijfer.
 - Bij het deeltentamen worden geen hulpmiddelen (rekenmachine, nota's, etc.) toegestaan.
 - Tweede lezer van dit deeltentamen is Dr. Joris Bierkens
 - De formules voor verwachting en variantie van bekende verdelingen zoals Binomiaal, Geometrisch, etc. mag u als bekend beschouwen, i.e., u moet deze niet opnieuw afleiden.
-

1. A, B, C zijn drie onafhankelijke gebeurtenissen waarvoor geldt

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

- a) Toon aan dat A^c en B^c onafhankelijk zijn.
- b) Bereken de conditionele kans

$$P(A \cup C|B)$$

2. Twee programma's worden gebruikt om berekeningen van een optieprijs uit te voeren. Verschillende berekeningen kunnen als onafhankelijk beschouwd worden. Programma 1 maakt een fout met kans 10^{-4} , terwijl programma 2 een fout maakt met kans 10^{-5} . De looptijd van programma 1 is (in seconden) geometrisch verdeeld met parameter $p = 0.5$, terwijl de looptijd van programma 2 (eveneens in seconden) Poisson verdeeld is met parameter $\lambda = 7$.
- a) We kiezen willekeurig één van beide programma's en maken een berekening. We constateren dat de berekening fout is uitgevoerd. Wat is de kans dat programma 2 gekozen werd?

- b) Indien 10^4 berekeningen worden uitgevoerd met programma 1, wat is dan de verwachting en variantie van het aantal gemaakte fouten? (hint: bepaal eerst de verdeling van het aantal fouten, en gebruik dan de formules voor verwachting en variantie van die verdeling).
 - c) We kiezen willekeurig één van beide programma's en laten het een berekening uitvoeren. Wat is de kans dat deze berekening precies 2 seconden duurt?
 - d) Beargumenteer dat de kans dat het tweede programma bij $2 \cdot 10^5$ berekeningen precies 10 fouten maakt benaderd kan worden door $\frac{2^{10}}{10!}e^{-2}$.
3. We werpen een oneerlijk muntstuk (met kans op munt gelijk aan $1/5$) tot de eerste keer munt. We noemen X het aantal benodigde worpen. Vervolgens werpen we een eerlijk muntstuk (onafhankelijk van het eerste muntstuk) X keer, noemen Y het aantal keer kop, en Z het aantal keer dat we eerst kop en daarna munt onmiddellijk na elkaar hebben.

In deze hele opgave mag u gebruiken (indien nodig) dat voor een geometrische verdeling met parameter p geldt dat de verwachting gelijk is aan $\frac{1}{p}$ en de variantie gelijk is aan $\frac{1-p}{p^2}$.

- a) Wat is de verdeling van X ? Specificeer hierbij ook de parameter(s).
- b) Bereken de conditionele kans $P(Y = 5|X = 10)$.
- c) Toon aan dat

$$\mathbb{E}(Y^2|X = n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n$$

en bereken met behulp van deze gelijkheid de verwachting $\mathbb{E}(Y^2)$.

- d) Toon aan dat

$$\mathbb{E}(Z|X = n) = (n - 1)\frac{1}{4}$$

en bereken hiermee de verwachting $\mathbb{E}(Z)$.

- e) Is Z binomiaal verdeeld? Verklaar uw antwoord.

4. We beschouwen N Poisson verdeeld met parameter λ , en werpen N keer een eerlijke dobbelsteen (de dobbelsteen is onafhankelijk van N).
- a) Toon aan dat het aantal keer dat we 1 gooien Poisson verdeeld is, en bepaal de parameter van deze Poisson verdeling.

- b) Toon aan dat het aantal keer dat we 1 gooien, en het aantal keer dat we “niet 1” gooien onafhankelijk zijn. Hint: noem X het aantal keer 1 en Y het aantal keer “niet 1”. Het is dan voldoende om aan te tonen dat

$$\mathbb{E}(z_1^X z_2^Y) = \mathbb{E}(z_1^X) \mathbb{E}(z_2^Y)$$

voor $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ (i.e., u mag gebruiken dat dit onafhankelijkheid van X en Y impliceert; dit moet u niet bewijzen).

5. Zijn de volgende beweringen juist of fout? Beargumenteer uw antwoord.

- a) Indien X Binomiaal verdeeld is met parameters n, p en Y binomiaal verdeeld met parameters n', p dan is $X + Y$ binomiaal verdeeld met parameters $n + n', p$.
- b) Indien X en Y onafhankelijk zijn dan geldt

$$E(XY^2) = \mathbb{E}(X)(\mathbb{E}(Y))^2$$