

Uitwerkingen

(1)

$$1 a) P(A^c \cap B^c)$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A^c) P(B^c) = (1 - \frac{1}{2}) (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{dus } P(A^c \cap B^c) = P(A^c) P(B^c).$$

$$b) P(A \cup C | B) = P(A \cup C)$$

omdat $A \cup C$ en B onafh.

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

(2)

2a) $A = \text{programma 1 gekozen}$
 $B = A^c = \text{programma 2 gekozen}$
 $F = \text{berekening fout uitgevoerd}$

$$P(B|F)$$

$$= \frac{P(F|B) P(B)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(F|B) P(B)}{P(F|A) P(A) + P(F|B) P(B)}$$

$$= \frac{10^{-5} \cdot \frac{1}{2}}{10^{-4} \cdot \frac{1}{2} + 10^{-5} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{11}$$

b) $X = \text{aantal gemaakte fouten}$

$$X \sim \text{Bin}(10^4, 10^{-4})$$

$$E(X) = np = 1.$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = 0.9999$$

(3)

c) ~~E~~ looptijd = Y

$$\begin{aligned}
 P(Y=2) &= P(Y=2|A) P(A) + P(Y=2|B) P(B) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7^2}{2!} e^{-7} \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{49}{2} e^{-7}.
 \end{aligned}$$

d) X = aantal fouten

$$= \text{Bin}(2 \cdot 10^5, 10^{-5})$$

we weten

$$\text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n}) \longrightarrow \text{Poisson}(\lambda) \quad \text{als } n \rightarrow \infty$$

$$\text{dus } \text{Bin}(2 \cdot 10^5, 10^{-5})$$

$$\approx \text{Poisson}(2)$$

$$P(\text{Poisson}(2) = 10) = \frac{2^{10}}{10!} e^{-2}$$

(4)

3 a) $X \approx \text{Geo}(\frac{1}{5})$

b) Indien $X=10$ is $Y \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$
verdeeld dus de kans is

$$P(Y=5 | X=10) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

c) Indien $X=n$ is $Y \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$
verdeeld en geldt dus dat

$$E[Y^2 | X=n] = \underbrace{\frac{1}{4} n^2}_{\text{kwadraat van verwachting}} + \underbrace{\frac{1}{4} n}_{\text{variancie}}$$

d) $Z = \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \sigma_i) \sigma_{i+1}$

met $\sigma_i = 1$ indien i -de worp
niet, $\sigma_i = 0$ indien i -de worp
kop. Dus, gegeven $X=n$

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \sigma_i) \sigma_{i+1} \quad \text{en}$$

$$E[Z | X=n] = (n-1) \cdot \frac{1}{4}$$

(5)

e) Nee, omdat Z onbegrensd is, i.e., voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$P(Z \geq n) > 0$$

en voor een $\text{Bin}(N, p)$ verdelde stochast $\tilde{Y}$ geldt

$$P(\tilde{Y} \geq N+1) = 0$$

4 a) noem $X_i = 1$ indien i -de worp een 1 is, en $X_i = 0$ anders

Dan

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

het aantal keer 1 dus

$$\begin{aligned} G_S(z) &= G_N(G_X(z)) \\ &= e^{\lambda G_X(z)} e^{-\lambda} \\ &= e^{\lambda(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}z)} e^{-\lambda} \\ &= e^{\frac{\lambda}{6}z} e^{-\frac{\lambda}{6}} \end{aligned}$$

6

is de genererende functie van
 Poisson ($\frac{\lambda}{6}$). Vanwege de uniciteits-
 stelling is S dus Poisson ($\frac{\lambda}{6}$)
 verdeeld.

$$b) E(z_1^X z_2^Y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(z_1^X z_2^Y | N=n) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \right) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(z_1 \frac{1}{6} + z_2 \frac{5}{6} \right)^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{\lambda \frac{1}{6} z_1 + \frac{5}{6} \lambda z_2 - \lambda}$$

$$= e^{\frac{\lambda}{6} z_1 - \frac{\lambda}{6}} \cdot e^{\frac{5}{6} \lambda z_2 - \frac{5}{6} \lambda}$$

$$= E(z_1^X) E(z_2^Y)$$

vanwege onderdeel (a)

vanwege analogon
 van onderdeel (a)

⑦

Ja, Want neem $X = Y$
dan is $X + Y = 2X$ kan
niet Bin verdeeld zijn
omdat het even is.

b) Want

$$E(XY^2) = E(X) E(Y^2)$$

maar

$$E(Y^2) \neq (E(Y))^2.$$