

1. Omdat $X \perp Y$ geldt

$$a) P(X=1 \mid X \leq 1, Y=3) = P(X=1 \mid X \leq 1)$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{P(X=0) + P(X=1)} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

$$b) P(X=k \mid X+Y=n)$$

$$= \frac{P(X=k \cap Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda}}{\sum_{r=0}^n P(X=r \cap Y=n-r)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda}}{\sum_{r=0}^n \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-r}}{(n-r)!} e^{-\lambda}}$$

$$= \frac{\frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}}{\sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} \cdot \frac{1}{(n-r)!}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

- c) Omdat uit onderdeel 1b) volgt dat, gegeven $X+Y=n$, X binomisch verdeeld is met parameters n , $p=\frac{1}{2}$ geldt

$$\mathbb{E}[X | X+Y=n] = n \cdot p = \frac{n}{2}.$$

$$d) \quad \mathbb{E} e^{t(X+2Y)} = \mathbb{E}(e^{tX} \cdot e^{2tY})$$

$$= \mathbb{E}(e^{tX}) \mathbb{E}(e^{2tY})$$

voor X Poisson(λ) verdeeld geldt

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\text{dus} \quad \mathbb{E}(e^{tX}) \mathbb{E}(e^{2tY}) = e^{\lambda(e^t - 1)} e^{\lambda(e^{2t} - 1)}$$

dit is niet van de vorm

$$e^{\tilde{\lambda}(e^t - 1)}$$

dus is $(X + 2Y)$ niet Poisson verdeeld.

$$2. a) f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x}(y|x) f_X(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{y^2}{2x}} e^{-x}$$

voor $y \in \mathbb{R}, x > 0$ en

$$f_{X,Y}(x,y) = 0 \text{ elders.}$$

$$b) E[Y^2] = \int_0^\infty E[Y^2/X=x] f_X(x) dx$$

nu is gegeven $X=x$ Y normaal verdeeld met parameters $\mu=0, \sigma^2=x$

$$\text{dus } E[Y^2/X=x] = x$$

en dus

$$E[Y^2] = \int_0^{\infty} E[Y^2 | X=x] f_X(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$$

c) de verdelingsfunctie van X is

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-y} dy = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

de gevraagde functie φ is F_X^{-1}

dus is de oplossing van

$$1 - e^{-y} = x \quad \Rightarrow \quad y = -\ln(1-x)$$

dus $\varphi(x) = -\ln(1-x)$

3 a) X_{10} is normaal verdeeld met

$$\mu = \frac{1}{10}, \quad \sigma^2 = 4$$

dus is $\frac{X_{10} - \frac{1}{10}}{2}$ standaard
normaal verdeeld.

Bijgevolg

$$P\left(\frac{X_{10} - \frac{1}{10}}{2} \geq 1.96\right) = 0.025$$

waaruit we besluiten dat het
gevraagde getal x gelijk is aan

$$x = \frac{1}{10} + 2 \cdot 1.96 \approx 4.02$$

$$b) \text{Var}(X_1 + 2X_2 + 2X_3)$$

$$= \text{Var}(X_1) + 4 \text{Var}(X_2) + 4 \text{Var}(X_3)$$

$$+ 4 \text{Cov}(X_1, X_2) + 8 \text{Cov}(X_2, X_3)$$

$$= 4 + 4 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{2}$$

$$= 42$$

Merk op dat we hier gebruikt hebben dat

6

$$\text{cov}(X_1, X_3) = 0$$

$$\begin{aligned} c) \quad & \text{Var} \left(\sum X_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{cov}(X_i, X_{i+1}) \\ &= 4n + 2 \frac{(n-1)}{2} \\ &\leq 5n \end{aligned}$$

Bijgevolg

$$0 \leq \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \leq \frac{5n}{n^2}$$

en dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = 0$$

d) Vanwege Chebyshev hebben we

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum (X_i - E(X_i))\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right)}{\varepsilon^2}$$

en dus vanwege onderdeel c)

$$\frac{1}{n} \sum (X_i - E(X_i)) \longrightarrow 0 \quad \text{in kans}$$

We moeten nu dus nog enkel aantonen dat

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \longrightarrow 0 \quad \text{als } n \rightarrow \infty$$

$$E(X_i) = \frac{1}{i}$$

$$\begin{aligned} \text{dus} \\ 0 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} &\leq \frac{1}{n} \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \frac{\ln(n)}{n} \end{aligned}$$

en dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 0$$

(je mocht ook gebruiken: als $a_i \rightarrow 0$ als $i \rightarrow \infty$ dan $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$).

$$e) \quad X_n \simeq N\left(\frac{1}{n}, 4\right)$$

$$\text{dus } Y_n = \frac{X_n}{2} \simeq N\left(\frac{1}{2n}, 1\right)$$

$$\text{dus}$$

$$M_{Y_n}(t) = e^{\frac{1}{2n}t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

en dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

en dus $Y_n \rightarrow N(0,1)$ in verdeling

omdat convergentie van moment-genererende functies convergentie in verdeling impliceert.

4a) μ is stationair in die zin voor alle j

$$\sum_{i=1}^n \mu_i P_{ij} = \mu_j$$

invullen geeft

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{ij} = \frac{1}{n}$$

wat geldt omdat $\sum_{i=1}^n P_{ij} = 1$ (dubbel stochastisch)

b) $\frac{1}{3} (1, 1, 1)$ is stationair vanwege onderdeel a). Het is de enige

stationaire verdeling omdat

P irreducibel is (zie je btw).

omdat

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

zodat we in twee stappen overal kunnen komen met positieve kans.

c) omdat $d = \min_{i,j} p_{i,j}^2 = 1/4$

geldt vanwege de contractie-
stelling dat

$$\begin{aligned} d(\mu P^n, \nu P^n) &\leq d(\mu, \nu) \left(1 - \frac{1}{4}\right)^n \\ &= d(\mu, \nu) \left(3/4\right)^n \\ &= 1 \cdot \left(3/4\right)^n \end{aligned}$$

Voor alle μ, ν

kijzen we nu voor

$$\mu = \delta_i \quad (\text{de rij met 1 op } i\text{-de plaats, nullen elders})$$

$$\nu = \frac{1}{n} (1, \dots, 1) = \frac{1}{3} (1, 1, 1)$$

dan vinden we

$$\frac{1}{2} \sum_i |(P^n)_{i,j} - \frac{1}{3}| \leq \left(3/4\right)^n$$

wat de gevraagde ongelijkheid
impliceert.