

Deeltentamen Inleiding Kansrekening

Woensdag 18 mei, 8:45-10:45 zaal PI

- Het deeltentamen bestaat uit 15 onderdelen. Met elk van deze onderdelen kan maximaal 2 punten verdiend worden.
 - Het deeltentamen wordt met een factor 0.4 gewogen in de berekening van het eindcijfer.
 - Bij het deeltentamen worden geen hulpmiddelen (rekenmachine, nota's, etc.) toegestaan.
 - Tweede lezer van dit deeltentamen is Dr. Dorota Kurowicka
 - De formules voor verwachting en variantie van bekende verdelingen zoals Binomiaal, Geometrisch, etc. mag u als bekend beschouwen, i.e., u moet deze niet opnieuw afleiden.
-

1. Een bron zendt onafhankelijke bits uit die de waarden 1 of 0 kunnen aannemen met kans p , resp. $1 - p$. Hierbij is $p \in (0, 1)$ een parameter. We noteren X_i de waarde van de i -de bit, $i = 1, 2, \dots$

De bits worden gelezen, en bij elke lezing wordt een fout gemaakt met kans ϵ . Hierbij is $\epsilon \in (0, 1)$ een tweede parameter.

We noteren Z_i de stochast die gelijk is aan 1 indien de i -de bit fout wordt gelezen, en anders gelijk is aan nul. U mag aannemen dat de stochasten Z_i onderling onafhankelijk zijn, en ook dat de stochasten Z_i en X_i onderling onafhankelijk zijn.

Tenslotte noteren we Y_i voor de uitslag van de lezing van de i -de bit, i.e.,

$$Y_i = (1 - Z_i)X_i + Z_i(1 - X_i)$$

- a) Bereken de kans dat de eerste bit als 1 gelezen wordt, i.e., de kans $\mathbb{P}(Y_1 = 1)$.
- b) Gegeven dat de eerste bit als 1 gelezen wordt, wat is de kans dat deze eerste bit echt gelijk is aan 1?
- c) We noemen $N_{20} := \sum_{i=1}^{20} Y_i$ het totale aantal als 1 gelezen bits wanneer 20 bits worden uitgezonden. Wat is de verdeling van N_{20} ? Specificeer hierbij ook de parameters.

- d) We noemen K het aantal bits dat wordt uitgezonden tot (en met) de eerste fout gelezen bit. Bereken de verwachting van K .
- e) Bereken de unieke waarde van p waarvoor geldt dat de kans dat een gelezen bit 1 is gelijk is aan de kans dat een uitgezonden bit 1 is.
- f) We noemen V het aantal keer dat twee opeenvolgende bits 1 worden uitgezonden in een reeks van 20 bits. I.e.,

$$V = \sum_{i=1}^{19} X_i X_{i+1}$$

Bereken de verwachting van V en beargumenteer waarom V niet binomiaal verdeeld is.

2. De cumulatieve verdelingsfunctie van een continue stochast X wordt gegeven door

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{indien } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^4 + x^8) & \text{indien } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{indien } x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

In deze opgave mag u gebruiken dat voor alle $a > 0$ geldt $\int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}$.

- a) Bereken de kansdichtheid van X .
- b) Bereken de verwachting en de variantie van X .
- c) Bereken de kansdichtheid van $Y = \frac{1}{1-X}$.
- d) Zij U een uniform verdeelde stochast op het interval $[0, 1]$. Voor welke functie $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is $\varphi(U)$ verdeeld zoals X ?
- e) Zij $X_i, i = 1, 2, \dots$ onafhankelijke stochasten met verdeling (1). Toon aan dat

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2 | X_3 > 5) = \frac{1}{2}$$

(hint: vanwege symmetrie geldt $\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \mathbb{P}(X_2 < X_1)$.)

3. Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Beargumenteer uw antwoord.

a) Indien X binomiaal verdeeld is, dan is $2X$ ook binomiaal verdeeld.

b) X en Y zijn onafhankelijke stochasten. Dan geldt

$$\text{Var}(X + 3Y) = \text{Var}(X - 3Y)$$

c) X is negatief binomiaal verdeeld met parameter n, p en Y is onafhankelijk binomiaal verdeeld met parameters n, p . Dan geldt

$$E(XY) = n^2$$

d) A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen waarvoor geldt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \text{ en } \mathbb{P}(A \cup B) = 1.$$

Dan geldt $\mathbb{P}(A) = 1$.