1)

a) $P(Y_1 = 1)$

$= P(Y_1 = 1 / Z_1 = 1)\, P(Z_1 = 1) + P(Y_1 = 1 / Z_1 = 0) P(Z_1 = 0)$

$= (1-p) \cdot \varepsilon + p(1-\varepsilon)$

b) $P(X_1 = 1 / Y_1 = 1) = \dfrac{P(Y_1 = 1 / X_1 = 1) P(X_1 = 1)}{P(Y_1 = 1)}$

$= \dfrac{(1-\varepsilon) \cdot p}{(1-p)\varepsilon + (1-\varepsilon)p}$

c) $N_{20} \simeq Bin(20, p^*)$

met $p^* = (1-p) \cdot \varepsilon + p(1-\varepsilon)$

d) $K \simeq Geo(\tilde{p})$ met $\tilde{p} = \varepsilon$

dus $\mathbb{E}(K) = \frac{1}{\varepsilon}$

e) $p = (1-p)\varepsilon + p(1-\varepsilon)$

geeft $p(2\varepsilon) = \varepsilon$ dus $p = 1/2$.

f) $\mathbb{E}(V) = \sum_{i=1}^{19} \mathbb{E}(X_i X_{i+1}) = 19 p^2$

V is niet Bin omdat $X_i X_{i+1}$ niet onderling onafhankelijk

2 a) $f_X(x) = F_X'(x)$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x^3 + 4x^7 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

b) $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x\,(2x^3+4x^7)\,dx = \frac{2}{5} + \frac{4}{9}$

$= \frac{38}{45}$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2(2x^3+4x^7)\,dx = \left(\frac{2}{6} + \frac{4}{10}\right)$

$= \frac{44}{60} = \frac{11}{15}$

$V(X) = E(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$= \frac{11}{15} - \left(\frac{38}{45}\right)^2$

c) $y = \frac{1}{1-x}$ geeft $y(1-x) = 1$

$x = \frac{y-1}{y}$

$= 1 - \frac{1}{y}$

dus $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$

dus $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}\left(2\left(1-\frac{1}{y}\right)^3 + 4\left(1-\frac{1}{y}\right)^7\right) & 1 < y < \infty \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

d) $\varphi = F_X^{-1}$

$\varphi(y)$ is dus de oplossing van

$$y = \frac{1}{2}(x^4 + x^8)$$

$$2y = x^4 + x^8$$

$$x^8 + x^4 - 2y = 0$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8y}}{2} = \varphi(y)$$

+ teken omdat $x \in [0,1]$.

e) omdat X_3 onafhankelijk is van X_1, X_2 geldt

$$P(X_1 < X_2 \mid X_3 > 5) = P(X_1 < X_2)$$

verder

$$P(X_1 < X_2) + P(X_2 \geq X_1) = 1$$

omdat X_2, X_1 continue stochast geldt $P(X_1 = X_2) = 0$ dus

$$P(X_1 < X_2) + P(X_2 > X_1) = 1$$

en omdat de hint geeft $P(X_1 < X_2) = P(X_2 > X_1)$

geeft $P(X_1 < X_2) + P(X_2 > X_1) = 1$

$P(X_1 < X_2) = 1/2$.

3a) fout in het algemeen $P(2X = 1) = 0$ en dit

kan nooit voor een Bin verdeling,

tenzij $p = 0$.

b) $Var(X + 3Y) = Var(X) + 9\, Var(Y)$

$Var(X - 3Y) = Var(X) + (-3)^2\, Var(Y)$

dus juist

c) $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{p}$

$\mathbb{E}[Y] = np$

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = n^2$ (omdat $X \perp Y$)

dus juist

d) stel $P(A) = x$. onafhankelijkheid geeft

$P(A \cup B) = x + x - x^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$. juist.